BAC BLANC n°2

MATHEMATIQUES

Série S

02 mai 2019

Durée de l'épreuve : 4 heures

08h00-12h00

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6

ATTENTION : RENDRE **TOUT** L'ENONCE AVEC VOTRE COPIE

Calculatrice autorisée en MODE EXAMEN

*Les élèves doivent **traiter les quatre exercices.***

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

EXERCICE 1 (5 pts) (Pour les élèves n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité)

Les six questions sont indépendantes.
Pour chaque question, une affirmation est proposée. Indiquer si chacune d'elles est vraie ou fausse, en justifiant.
Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Une absence de réponse n'est pas pénalisée.

Affirmation 1

On considère l'équation d'inconnue le nombre réel x

$$\sin(x)(2\cos^2(x) - 1) = 0.$$

Cette équation admet exactement 4 solutions sur] $-\pi$; π [qui sont $-\frac{\pi}{4}$, 0, $\frac{\pi}{4}$ et π.

Affirmation 2

$$\ln(\sqrt{e^7}) + \frac{\ln(e^9)}{\ln(e^2)} = \frac{e^{\ln 2+\ln 3}}{e^{\ln 3-\ln 4}}$$

Affirmation 3

$$\int_0^{\ln 3} \frac{e^x}{e^x+2}\,dx = -\ln\left(\frac{3}{5}\right)$$

Affirmation 4

L'équation $\ln(x-1) - \ln(x+2) = \ln 4$ admet une unique solution dans IR

Affirmation 5

On munit le plan complexe d'un repère orthonormé direct (O, $\vec{u}, \vec{v}$)
L'ensemble des points M du plan d'affixe z tels que $|z-4| = |z+2i|$ est une droite passant par le point A d'affixe 3i.

Affirmation 6

Dans ma rue, il pleut un soir sur quatre. S'il pleut, je sors mon chien avec une probabilité égale à $\frac{1}{10}$; s'il ne pleut pas je sors mon chien avec une probabilité égale à $\frac{9}{10}$.
Je sors mon chien. La probabilité qu'il ne pleuve pas est égale à $\frac{27}{28}$.

EXERCICE 1 bis (Pour les élèves ayant suivi l'enseignement de spécialité)

Partie A : Démonstration de cours

On considère quatre entiers relatifs a, b, c et d et un entier naturel n.

1) Démontrer que :
   Si $a \equiv b \bmod n$ et $c \equiv d \bmod n$ alors $ac \equiv bd \bmod n$
2) Démontrer que :
   Si $a \equiv b \bmod n$ alors $a^p \equiv b^p \bmod n$ pour tout entier naturel p non nul.

Partie B :Application

Le but de cet exercice est d'envisager une méthode de cryptage à clé publique d'une information numérique, appelé système RAS, en l'honneur des mathématiciens Ronald Rivest, Adi Shamir et Leonard Adleman, qui ont inventé cette méthode de cryptage en 1977et l'ont publié en 1978.

Les questions 1) et 2) sont des questions préparatoires, la question 3) aborde le cryptage et la question 4) le décryptage.

1) Cette question envisage de calculer le reste dans la division euclidienne par 55 de certaines puissances de l'entier 8.
   a) Vérifier que $8^7 \equiv 2 \bmod 55$.
   En déduire le reste dans la division euclidienne par 55 de 8^{21}.
   b) Vérifier que $8^2 \equiv 9 \bmod 55$, puis déduire de la question a) le reste dans la division euclidienne par 55 de 8^{23}.

2) Dans cette question, on considère l'équation (E) $23x - 40y = 1$, dont les solutions sont des couples (x ; y) d'entiers relatifs.
   a) Justifier le fait que l'équation (E) admet au moins un couple solution.
   b) Donner un couple, solution particulière de l'équation (E).
   c) Déterminer tous les couples d'entiers relatifs solution de l'équation (E).
   d) En déduire qu'il existe un unique entier d vérifiant les deux conditions suivantes :
   • $0 \leq d < 40$ • $23d \equiv 1 \bmod 40$

3) **Cryptage dans le système RSA**
   Une personne A choisit deux nombres premiers p et q, puis calcule les produits N = pq et n = (p – 1)(q – 1). Elle choisit également un entier naturel c premier avec n.

   La personne publie le couple (N, c), qui est une clé publique permettant à quiconque de lui envoyer un nombre crypté.
   Les messages sont numérisés et transformés en une suite d'entiers compris entre 0 et N -1.
   Pour crypter un entier a de cette suite, on procède ainsi : on calcule le reste b dans la division euclidienne par N du nombre a^c, at le nombre crypté est l'entier b.
   Dans la pratique, cette méthode est sûre si la personne A choisit des nombres premiers p et q très grands, s'écrivant avec plusieurs dizaines de chiffres.
   On va l'envisager ici avec des nombres plus simples p = 5 et q = 11.

La personne A choisit également c = 23.

a) Calculer les nombres N et n, puis justifier que la valeur c vérifie la condition voulue.
b) Un émetteur souhaite envoyer à la personne A le nombre A = 8.
Déterminer la valeur du nombre crypté b.

4) Décryptage dans le système RSA

La personne A calcule dans un premier temps l'unique entier naturel d vérifiant les conditions $0 \leq d < n$ et $cd \equiv 1 \mod n$. Elle garde secret ce nombre d qui lui permet, à elle seule, de décrypter les nombres qui lui ont été envoyés cryptés avec sa clé publique.
Pour décrypter un nombre crypté b, la personne a calcule le reste a dans la division euclidienne par N du nombre b^d, et le nombre en clair – c'est-à-dire le nombre avant cryptage- est le nombre a.
On admet l'existence et l'unicité de l'entier d, et de fait que le décryptage fonctionne.
Les nombres choisis par A sont encore p = 5, q = 11 et c = 23.

a) Quelle est la valeur de d ?
b) En appliquant la règle de décryptage, retrouver le nombre en clair lorsque le nombre crypté est b = 17.

EXERCICE 2 (5 pts) (Pour tous les élèves)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé (O ; $\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}$), on considère la droite (D) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 2 + t \\ y = 1 - 3t \\ z = 2t \end{cases}$ (t ∈ ℝ)

et les points A(1 ; 1 ; 1), B(2 ; 0 ; 1), C(0,5 ; 0,5 ; 2)

1) a) Donner un vecteur directeur $\vec{u}$ de la droite (D)
b) Donner les coordonnées du point E de la droite (D) de paramètre 0.
c) Le point A appartient-il à la droite (D) ? Justifier.
2) Justifier que les points A, B et C déterminent un plan.
3) a) Montrer que les vecteurs $\vec{u}, \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont coplanaires.
b) En déduire que la droite (D) est incluse dans le plan (ABC).
4) a) Soit la droite (D') passant par le point F(2 ; -3 ; 5) et de vecteur directeur $\vec{v}$ (1 ; - 1 ; 2).

Justifier qu'une représentation paramétrique de la droite (D') est :

$$\begin{cases} x = 2 + k \\ y = -3 - k \\ z = 5 + 2k \end{cases} \quad (k \in \mathbb{R})$$

c) Etudier la position relative des droites (D) et (D')

EXERCICE n°3 : (5pts) (Pour tous les élèves)

On définit la suite de nombres complexes (z_n) de la manière suivante : $z_0 = 1$ et pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \frac{1}{3}z_n + \frac{2}{3}i$

On se place dans un plan muni d'un repère orthonormé direct $(O; \vec{u}; \vec{v})$.

Pour tout entier naturel n, on note A_n le point du plan d'affixe z_n

Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = z_n - i$ et on note B_n le point du plan d'affixe u_n

On note C le point du plan d'affixe i

1) Exprimer u_{n+1} en fonction u_n pour tout entier naturel n.
2) Démontrer que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (1 - i)$$

3) a) Pour tout entier naturel n, calculer, en fonction de n, le module de u_n

   b) Démontrer que, $\lim\limits_{n\to+\infty} |z_n - i| = 0$

   c) Quelle interprétation géométrique peut-on donner de ce résultat ?

4) a) Soit n un entier naturel, déterminer un argument de u_n

   b) Déterminer la forme algébrique de Z = $\frac{u_{n+2} - u_{n+1}}{u_{n+1} - u_n}$

   c) En déduire que, lorsque n décrit l'ensemble des entiers naturels, les points B_n sont alignés.

   d) Démontrer que, pour tout entier naturel n, le point A_n appartient à la droite d'équation

$$y = -x + 1$$

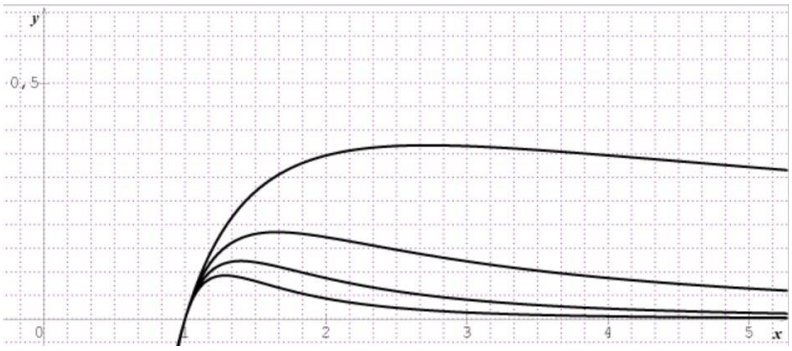
EXERCICE 4 : (5 pts) (Pour tous les élèves)

On considère, pour tout entier n strictement positif, les fonctions f_n, définies sur l'intervalle [1 ;5] par :

$$f_n(x) = \frac{\ln x}{x^n}$$

Pour tout entier n strictement positif, on note (C_n) la courbe représentative de la fonction f_n dans un repère orthogonal.

Sur le graphique ci-dessous sont représentées les courbes (C_n) pour n ϵ{1 ;2 ;3 ;4}



1) Montrer que pour tout entier n strictement positif et tout x ϵ [1 ; 5] :

$$f_n'(x) = \frac{1-n\ln(x)}{x^{n+1}}$$

2) Pour tout entier n strictement positif, on admet que $e^{\frac{1}{n}} \leq 5$
   a) Montrer que la fonction f_n admet un maximum sur [1 ;5]
   b) On note A_n, le point de la courbe (C_n) ayant pour ordonnée ce maximum. Montrer que tous les points A_n appartiennent à une même courbe d'équation $y = \frac{1}{e}\ln(x)$.

3) a) Montrer, que pour tout entier n strictement supérieur à 1 et tout réel x ϵ [1 ; 5] :

$$0 \leq \frac{\ln(x)}{x^n} \leq \frac{\ln 5}{x^n}$$

   b) Montrer que pour tout entier n strictement supérieur à 1 :

$$\int_1^5 \frac{1}{x^n}\,dx = \frac{1}{n-1}\left(1 - \frac{1}{5^{n-1}}\right)$$

   d) Pour tout entier n strictement positif, on s'intéresse à l'aire, exprimée en unités d'aire, sous la courbe (C_n), c'est-à-dire l'aire du domaine du plan délimité par les droites d'équations x = 1, x = 5, y = 0 et la courbe (C_n)

   Déterminer la limite de cette aire quand n tend vers $+\infty$