

Ex 1: 1) $P_S(\bar{R}) = \frac{P(\bar{R} \cap S)}{P(S)}$

on, $P(\bar{R} \cap S) = 0,3 \times 0,2$
 $= 0,06$

$$\begin{aligned} P(S) &= P(S \cap R) + P(S \cap \bar{R}) \\ &= P_R(S) \times P(R) + P_{\bar{R}}(S) \times P(\bar{R}) \quad (\text{prob. totales}) \\ &= 0,4 \times 0,7 + 0,2 \times 0,3. \end{aligned}$$

d'où $P_S(\bar{R}) = \frac{0,06}{0,4 \times 0,7 + 0,2 \times 0,3} \approx 0,176 \neq 0,06$ (FAUX)

Il y a eu confusion entre $P(\bar{R} \cap S)$ et $P_S(\bar{R})$

2) $R \in \mathbb{R}$ tq $0 \leq R < 18$
 $X \sim \mathcal{U}(R; 18)$

$E(X) = 12 = \frac{R+18}{2}$ (car si $X \sim \mathcal{U}(a; b)$ alors $E(X) = \frac{a+b}{2}$).

$R+18=24 \Leftrightarrow R=24-18=6$ (FAUX)

3)

Pour tout $x > 0$:

$$\ln(x^2) - \ln\left(\frac{x^5}{e}\right) + \ln 2 = \ln(2x) + 5$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{x^2}{\frac{x^5}{2}}\right) + \ln 2 = \ln 2 + \ln x + 5$$

$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{2}{x^3}\right) + \ln 2 = \ln 2 + \ln x + 5$$

$$\Leftrightarrow 1 - 3 \ln x = \ln x + 5$$

$$\Leftrightarrow -4 \ln x = 4$$

$$\Leftrightarrow \ln x = -1$$

$$1 \text{ seule sol } x = \underline{\frac{1}{e}}$$

VRAI

4)

f' est continue sur $]0; 5]$, strictement décroissante
avec $0 \in [f(5); f(0)]$

d'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires,

l'équation $f'(x) = 0$ admet 1 unique solution dans $]0; 5]$

On raisonne de même sur $[5; 15]$

d'où $f'(x)=0$ admet aussi une unique solution sur $[5; 15]$

Donc: f admet 2 tangentes parallèles à l'axe des abscisses.

(F.A.X)

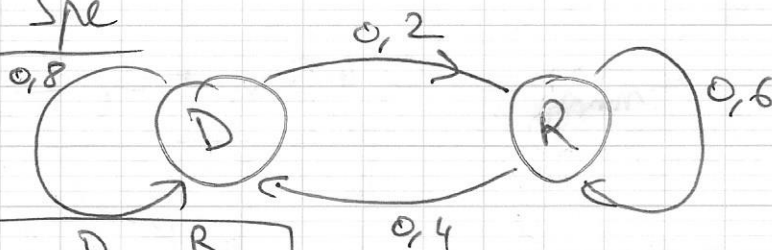
f' est strictement croissante sur $[5; 15]$ (d'après les variations).

d'où $f'' > 0$ sur $[5; 15]$

c'est-à-dire: f convexe sur $[5; 15]$

Exercice (2): Spé

1) a)



b)

$$M = \begin{matrix} & \begin{matrix} D & R \end{matrix} \\ \begin{matrix} D \\ R \end{matrix} & \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Matrice de transition (pas d'adjacence)
⚠

2)

$$P_n = (d_n \quad r_n)$$

a)

$$P_1 = (d_1 \quad r_1)$$

$$= (0 \quad 1)$$

car Julie emprunte la voie rapide.
Belle par.

b)

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0,72 & 0,28 \\ 0,56 & 0,44 \end{pmatrix}$$

$$P_3 = P_1 \times M^2 = (0 \quad 1) \times \begin{pmatrix} 0,72 & 0,28 \\ 0,56 & 0,44 \end{pmatrix} = (0,56 \quad 0,44)$$

La probabilité que Julie emprunte les routes départementales est de 0,56

3)a)

$$P_{n+1} = P_n \times M.$$

$$\begin{pmatrix} d_{n+1} & r_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_n & r_n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0,8 & 0,2 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$$

d'où:

$$\begin{cases} d_{n+1} = 0,8d_n + 0,4r_n \\ r_{n+1} = 0,2d_n + 0,6r_n \end{cases}, n \in \mathbb{N}^*$$

4) $\rightarrow$ 3b) C'est l'algorithme 3. (car $r_n = 1$ et il y a 2 passages de Buchs à l'ave)

or, $d_n + r_n = 1 \Leftrightarrow d_n = 1 - r_n$.

d'où $r_{n+1} = 0,2(1 - r_n) + 0,6r_n$

$$\underline{r_{n+1} = 0,4r_n + 0,2}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

5)

$$v_n = r_n - \frac{1}{3}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

$$a) v_{n+1} = r_{n+1} - \frac{1}{3} = 0,4r_n + 0,2 - \frac{1}{3}$$

$$= 0,4r_n + \frac{3-5}{15}$$

$$= \frac{2}{5} r_n - \frac{2}{15}$$

$$= \frac{2}{5} \left(r_n - \frac{1}{3} \right) = \frac{2}{5} v_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

donc (v_n) géométrique de raison $\frac{2}{5}$
et de 1^{er} terme $v_1 = r_1 - \frac{1}{3}$

$$= 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

b) Comme (v_n) géométrique:

$$v_n = v_1 \times q^{n-1} = \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1}$$

$$\text{or, } v_n = r_n - \frac{1}{3} \Leftrightarrow r_n = v_n + \frac{1}{3} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

$$\text{d'où } r_n = \frac{2}{3} \times \left(\frac{2}{5}\right)^{n-1} + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{2}{3} \times 0,4^{n-1} + \frac{1}{3}$$

$$= \frac{2}{3} \times \frac{5}{2} \times 0,4^n + \frac{1}{3}$$

$$r_n = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} \times 0,4^n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

$$c) -1 < 0,4 < 1 \quad \text{d'où } 0,4^n \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$$

$$\text{or, } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$$

donc

$$\text{par somme, } \lim_{n \rightarrow +\infty} r_n = \frac{1}{3}$$

A long terme,

la probabilité pour Julie d'emprunter la voie rapide sera de $\frac{1}{3}$.

Exercice (3):

$$1) P(D < 8) \approx \frac{0,11}{\text{(à la calculatrice)}}$$

$$2) \text{ Pas de rigueur: } 8 < D < 26.$$

$$\text{d'où } \underline{P(8 < D < 26) = 0,85}$$

$$3) P(3,5 < D < 27,5) = P(\mu - 2\sigma < D < \mu + 2\sigma) \\ (\text{intervalle à } 2\sigma).$$

en effet, $\mu - 2\sigma = 15,5 - 12 = 3,5$
 $\mu + 2\sigma = 15,5 + 12 = 27,5.$

on ; $P(\mu - 2\sigma < D < \mu + 2\sigma) \approx 0,95$

donc $P(3,5 < D < 27,5) \approx 0,95$

Partie (B):

1) on répète 10 fois de manière indépendante, la même épreuve de Bernoulli (tirage avec remise) de paramètre $p = \frac{1}{4}$
Schema de Bernoulli

X suit $B(10; \frac{1}{4})$

2) $P(X=4) = \binom{10}{4} \left(\frac{1}{4}\right)^4 \times \left(\frac{3}{4}\right)^6$
 $\approx 0,19$

3) $P(X \geq 2) = 1 - P(X < 2)$
 $= 1 - P(X \leq 1)$
 $\approx 1 - 0,24$
 $\approx 0,76$

Partie (C):

Amplitude de l'intervalle au niveau de confiance 0,95 $= \frac{2}{\sqrt{n}} \leq 0,1$

$\Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{n}} \leq 0,05 \Leftrightarrow \sqrt{n} \geq \frac{1}{0,05} = 20$

c'est-à-dire $n \geq 20^2 = 400$

Il faut donc effectuer au minimum 400 relevés.

Exercice 4):

$$f(x) = 70 + (14x + 42)e^{-\frac{x}{5}} \quad , \quad f \text{ 2 fois dérivable sur } [0; 60].$$

Partie A):

$A(7; f(7))$ est 1 pt d'inflexion de f .

$$\begin{aligned} 1) \quad f(0) &= 70 + 42 = 112 \\ f(60) &= 70 + (14 \times 60 + 42)e^{-\frac{60}{5}} \\ &= 70 + 882e^{-12} \approx \underline{70} \end{aligned}$$

$$2) \text{ Comme } A \text{ est 1 pt d'inflexion, } \underline{f''(7) = 0}$$

3) a) voir figure

b)

Le rect. de long 60 et de larg. 70 est contenu ds cette surface.
car, son ari est de $60 \times 70 = 4200 \text{ m}^2 > 3800$.

Estimation immédiate

Partie B):

1) f est dérivable sur $[0; 60]$ et $f'(x) = ?$

$$\text{on pose } u(x) = 14x + 42$$

$$v(x) = e^{-\frac{x}{5}}$$

$$u'(x) = 14$$

$$v'(x) = -\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}$$

$$\text{car, } (uv)' = u'v + uv' \\ \text{d'où } f'(x) = 14e^{-\frac{x}{5}} + \left(-\frac{1}{5}\right) \times (14x + 42)e^{-\frac{x}{5}}$$

$$= \frac{1}{5}(-14x - 42 + 70)e^{-\frac{x}{5}}$$

$$\underline{f'(x) = \frac{1}{5}(-14x + 28)e^{-\frac{x}{5}}}$$

2)a) Sur $\{0; 60\}$:

$$\cdot e^{-\frac{x}{5}} > 0$$

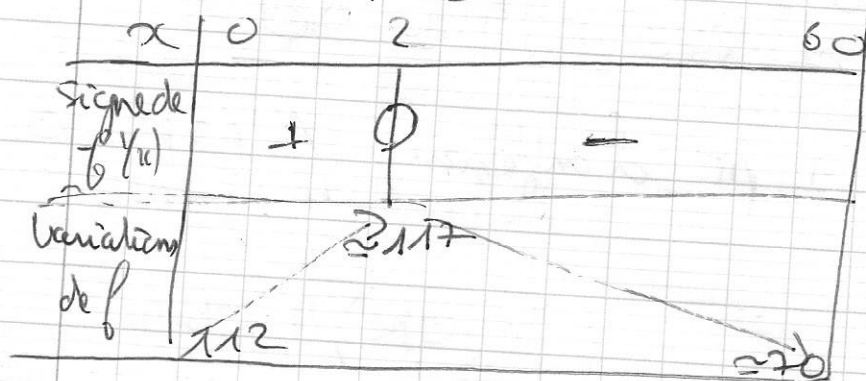
$$\cdot -14x + 28 \geq 0 \Leftrightarrow -14x \geq -28$$

$$\Leftrightarrow x \leq 2$$

Donc $f'(x) \geq 0$, pour $x \in [0; 2]$

et $f'(x) < 0$, pour $x \in]2; 60]$

b) Sur $\{0; 60\}$:



$$f(0) = 112$$

$$f(2) \approx 117$$

$$f(60) \approx 70$$

3)

Après le loguel, $f''(x) = 14e^{-\frac{x}{5}} \times \frac{x-7}{25}$

$$14e^{-\frac{x}{5}} > 0$$

$$\text{et } \frac{x-7}{25} \geq 0 \Leftrightarrow x-7 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq 7$$

$$f''(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [7; 60]$$

Donc f est convexe sur $[7; 60]$ et concave sur $[0; 7]$

$$4) \quad g(x) = (14x + 42)e^{-\frac{x}{5}}$$

$$G(x) = (-70x - 560)e^{-\frac{x}{5}}$$

a) G est dérivable sur $[0; 60]$ d'où :

$$\text{on pose } u(x) = -70x - 560 \quad v(x) = e^{-\frac{x}{5}}$$

$$u'(x) = -70 \quad v'(x) = -\frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}$$

$$\text{or, } (uv)' = u'v + uv'$$

$$\text{N'ou : } G'(x) = -70e^{-\frac{x}{5}} - \frac{1}{5}e^{-\frac{x}{5}}(-70x - 560)$$

$$= e^{-\frac{x}{5}}(14x + 42 - 70)$$

$$= e^{-\frac{x}{5}}(14x + 42) = g(x)$$

Donc G est une primitive de g sur $[0; 60]$

b) or, $f(x) = 70 + (14x + 42)e^{-\frac{x}{5}}$

d'où $F(x) = 70x + G(x)$ est 1 primitive de f sur $[0; 60]$

$$= 70x + (-70x - 560)e^{-\frac{x}{5}}$$

c) $\int_0^{60} f(x) dx = \left[70x + (-70x - 560)e^{-\frac{x}{5}} \right]_0^{60}$

$$= 70 \times 60 + (-70 \times 60 - 560)e^{-12}$$

$$= 4760 + 560$$

$$\approx \underline{\underline{4760 \text{ m.a}}}$$

Partie (C):

$$\begin{aligned} \text{Aire à couvrir} &\approx 2 \times 4760 + 3400 \\ &= 14920 \text{ cm}^2 \\ &\approx 1,49 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

$$\frac{1}{4} \times 10 = 2,5 \text{ m}^2$$

Il aura donc suffisamment de vernis