LYCEE JEAN XXIII

BAC BLANC N°2

Avril 2018

TERMINALE ES

Epreuve de mathématiques

Durée : 3h

Calculatrice autorisée SANS mode EXAMEN

Professeurs : Mme Vigour – M Nasser – M Mangeard

<u>Exercice 1 :</u> Vrai ou Faux (Asie 2017) (4 pts)

Soit f la fonction définie et dérivable sur]0 ; +∞[par :

$$f(x) = 1 + \ln(x).$$

On note C la courbe représentative de la fonction f dans le plan muni d'un repère orthonormé.
On note f ' la fonction dérivée de la fonction f sur]0 ; +∞[.

Pour chacune des quatre affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse ***<u>en justifiant la réponse.</u>***

Affirmation 1
On note F la primitive sur]0 ; +∞[de la fonction f qui vérifie F(1) = 0.
Pour tout réel x strictement positif, F(x) = xln(x).

Affirmation 2
La fonction f est strictement croissante sur l'intervalle]0 ; +∞[.

Affirmation 3
L'équation f(x) = 2 possède exactement une solution dans l'intervalle [1 ; 10].

Affirmation 4
Il existe au moins un point de la courbe C pour lequel la tangente en ce point est située entièrement sous la courbe C.

<u>Exercice 2 :</u> (Asie 2014) (5 pts)

On étudie la propagation d'une maladie lors d'une épidémie.

Des relevés statistiques ont permis de modéliser, par une fonction f, le nombre de malades durant l'épidémie.
Cette fonction f est définie sur [1; 26] par :

$$f(t) = 24t\ln(t) - 3t^2 + 10$$

où t est le nombre de semaines écoulées depuis le premier cas constaté et f(t) est le nombre de milliers de malades comptabilisés après t semaines.

1. On note f ′ la fonction dérivée de la fonction f.

Montrer que, pour tout réel t de l'intervalle [1; 26], f ′(t) = 24ln(t) − 6t + 24.

2. Les variations de la fonction f ' sont données dans le tableau suivant :

t	1		4		26
$f'(t)$		↗		↘	

a. Montrer que l'équation f '(t) = 0 admet, dans l'intervalle [1 ; 26], une solution et une seule qu'on notera α et donner l'encadrement de α par deux entiers naturels consécutifs.
b. En déduire le signe de f '(t) sur [1 ; 26] et les variations de f sur [1 ; 26].

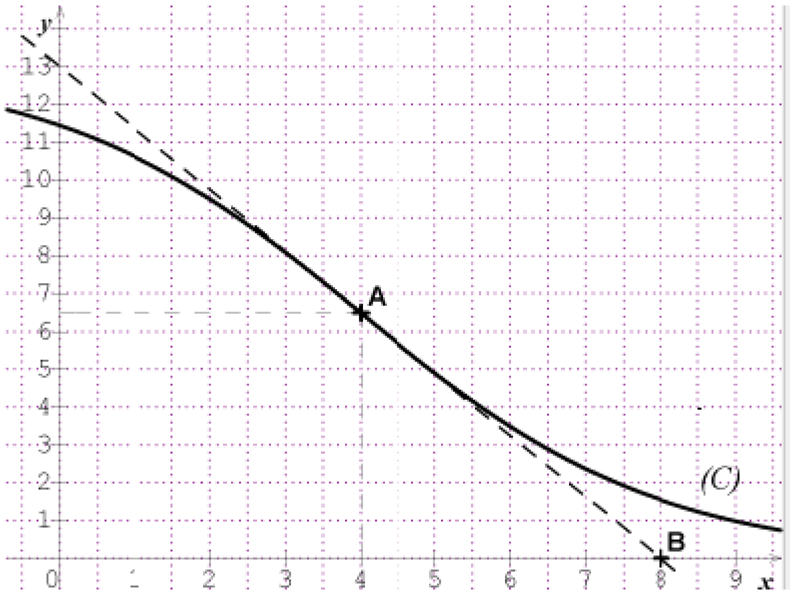
3. Le réel f ‘(t) représente la vitesse de propagation de la maladie au bout de t semaines.
a. Dans le contexte du problème, donner une interprétation de l’expression mathématique suivante : « sur [4 ; 26], f ‘ est décroissante. »
b. A partir des questions précédentes, déterminer le nombre de semaines écoulées à partir duquel le nombre de malades par semaine a commencé à diminuer.

Exercice 4 : (6 pts)

Partie A

La courbe (C) ci-dessous représente une fonction f définie sur [0 ;+∞[par $f(x) = \dfrac{a}{b + e^{0,5x-2}}$

où a et b, sont deux réels. La tangente à (C) au point A(4 ;6,5) passe par B(8 ;0)



1) Déterminer f(4) et f ’(4)
2) Exprimer f ’(x) en fonction de a et b
3) A l’aide des résultats précédents, montrer soigneusement que a = 13 et b = 1
4) On suppose que f est deux fois dérivable sur]-∞ ;+∞[et un logiciel de calcul formel donne : $f''(x) = -\frac{13}{2}\left[\frac{0,5e^{0,5x-2}(1-e^{0,5x-2})}{(1+e^{0,5x-2})^3}\right]$

   a) Résoudre l’inéquation en justifiant : $1 - e^{0,5x-2} \geq 0$
   b) Etudier la convexité de f en justifiant.
   c) Montrer que A est le point d’inflexion de (C)

Partie B

Soit la fonction g définie par $g(x) = e^{0,25x} - 1$, sur [0 ;+∞[

1) Etudier le sens de variation de g. Dresser son tableau de variations sur [0 ;10]
2) a) Montrer que la fonction f – g est décroissante sur [0 ;10]
   b) Démontrer que l’équation f(x) – g(x) = 0 admet une seule solution sur α sur [0 ;10]
   c) A l’aide de la calculatrice, donner la valeur de α arrondie au millième près.

<u>Exercice 5 : (5 pts)</u> ***<u>UNIQUEMENT Pour les élèves n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité mathématiques</u>***

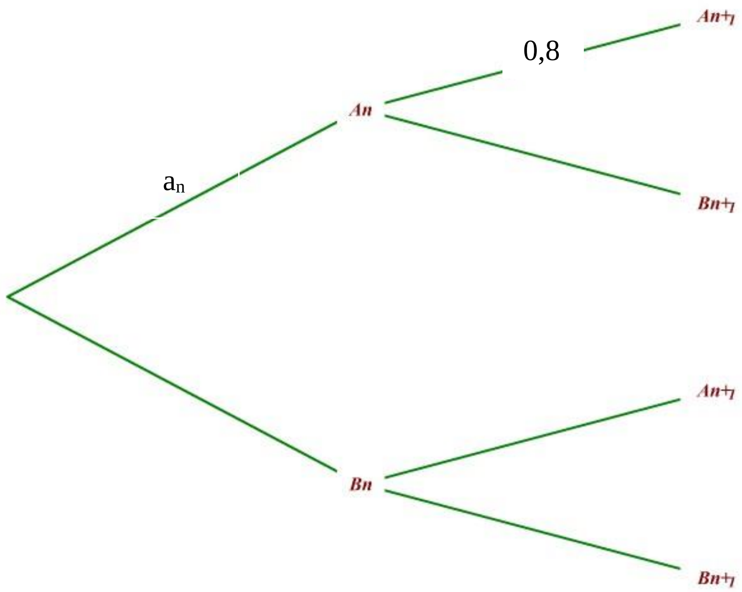
Deux joueurs A et B, amateurs d'un jeu vidéo, décident de jouer, toutes les semaines, une partie l'un contre l'autre.

- La probabilité que A gagne la partie de la première semaine est 0,7
- Si A gagne la partie de la semaine n, il garde la même stratégie de jeu la semaine suivante, et la probabilité qu'il gagne la partie de la semaine n+1 est de 0,8
- Si A perd la partie de la semaine n, il change de stratégie de jeu pour la semaine suivante et, alors, la probabilité qu'il gagne la partie de la semaine n + 1 est seulement de 0,3.

Pour tout entier n supérieur ou égal à 1, on désigne par A_n l'événement « A gagne la partie de la n-ième semaine », B_n l'événement « B gagne la partie de la n-ième semaine »

et on note : $a_n = P(A_n)$. Alors, on a $a_1 = P(A_1) = 0,7$

1) a) <u>Recopier</u> et <u>compléter</u> l'arbre ci-dessous :



b) Justifier **<u>soigneusemen</u>**t que $a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$ pour tout entier n supérieur ou égal à 1.

2) On considère la suite (u_n) définie pour tout entier n supérieur ou égal à 1 par :

$$u_n = a_n - 0,6$$

a) Démontrer que (u_n) est une suite géométrique de raison 0,5.
b) En déduire l'expression de a_n en fonction de n, puis la limite de la suite (a_n). Interpréter le résultat obtenu. (Faire une phrase)

<u>Exercice 5Bis :</u> ***<u>UNIQUEMENT Pour les élèves ayant suivi l'enseignement de spécialité mathématiques</u>*** **<u>(5 pts)</u>**

Partie A

Une entreprise E commande chaque semaine ses fournitures auprès de deux fournisseurs A et H.
Les constats faits les premières semaines conduisent à modéliser l'évolution du choix du fournisseur pour les commandes d'une semaine à l'autre par un graphe probabiliste de sommets A et H où :

- A désigne l'état « la commande est passée auprès du fournisseur A ».
- H désigne l'état « la commande est passée auprès du fournisseur H ».

La matrice de transition M de ce graphe, en considérant les sommets dans l'ordre A et H, est :

$$M = \begin{pmatrix} 0{,}95 & 0{,}05 \\ 0{,}1 & 0{,}9 \end{pmatrix}$$

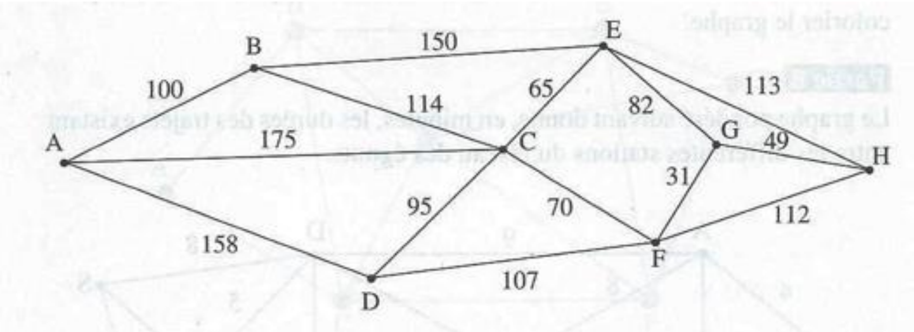
1) Dessiner le graphe probabiliste associé à la matrice M.
2) Donner la signification du nombre 0,95 dans la matrice M.

   Pour tout entier naturel n, on note :
   - a_n la probabilité de l'événement « la semaine n, l'entreprise E commande ses fournitures auprès du fournisseur A »
   - h_n la probabilité de l'événement « la semaine n, l'entreprise E commande ses fournitures auprès du fournisseur H »
   - P_n la matrice $(a_n \ \ h_n)$ correspondant à l'état probabiliste pour la semaine n.

3) On donne $P_0 = (0{,}4 \ \ 0{,}6)$.
   a) Déterminer les états P_2, P_3 et P_4. On arrondira les résultats à 10^{-2} près.
   b) En déduire la semaine où, pour la première fois, la probabilité que l'entreprise E commande ses fournitures auprès du fournisseur A dépasse la probabilité qu'elle les commande auprès du fournisseur H.
4) Vérifier que la matrice ligne $P\left(\frac{2}{3} \ \ \frac{1}{3}\right)$ correspond à l'état stable du système. On détaillera les calculs
   En donner une interprétation.

Partie B

Le directeur de l'entreprise E rend visite à ses fournisseurs, il se rend du fournisseur A au fournisseur H et souhaite effectuer le moins de kilomètre possible.
Son assistant dresse le graphe suivant qui schématise les trajets, en kilomètres, entre les six villes de la région, notées B ; C ; D ; E ; F et G et les deux sites A et H.



Déterminer l'itinéraire le plus court reliant les deux sites A et H et indiquer le nombre de kilomètres à effectuer. Justifier la réponse.