LYCEE JEAN XXIII

BAC BLANC N°1

TERMINALE ES

Epreuve de mathématiques

Durée : 3h

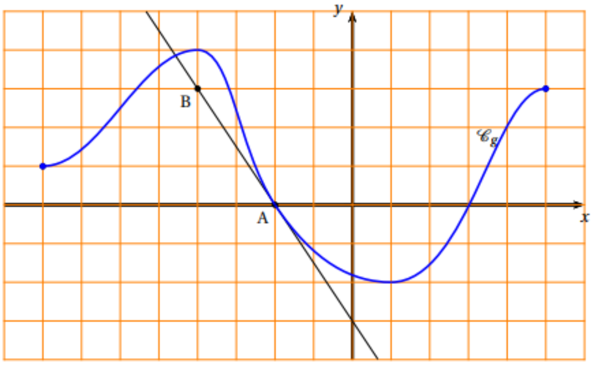
Calculatrice autorisée en mode EXAMEN

Professeurs : M Nasser – M Mangeard

Exercice 1 : QCM

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Il est constitué de cinq questions indépendantes. Pour chacune des questions posées, **une seule** des trois réponses proposées est exacte. Recopier le numéro de chaque question et indiquer la réponse choisie. ***Aucune justification n'est demandée***.

1) La courbe Cg tracée ci-dessous est la représentation graphique d'une fonction g définie et dérivable sur l'intervalle $[-8 ; 5]$. La droite (AB) tracée sur le graphique est la tangente à la courbe Cg au point A d'abscisse -2. On note g ′ la fonction dérivée de la fonction g sur l'intervalle $[-8 ; 5]$.



   a) $g'(-2) = -1{,}5$
   b) $g'(-2) = 0$
   c) $g'(-2) = -\frac{2}{3}$.

2) Soit $f(x) = 3(1 - 2x)e^{-2x^2+2x-1}$
   Une primitive de f sur IR est donnée par :
   a) $F(x) = \frac{3}{2}\, e^{-2x^2+2x-1} + 7$
   b) $F(x) = \frac{2}{3} e^{-2x^2+2x-1}$
   c) $F(x) = 3e^{-2x^2+2x-1} - 5$

3) Pour tout réel a non nul, le nombre réel $e^{-\frac{1}{a}}$ est égal à :
   a) $-\, e^{\frac{1}{a}}$
   b) $\frac{1}{e^{\frac{1}{a}}}$
   c) $\frac{1}{e^{a}}$

4) On considère la fonction f définie sur R par : $f(x) = xe^{-x}$. f est dérivable sur IR et on note f ′ sa fonction dérivée. Alors, pour tout nombre réel x, on a :
   a) $f'(x) = e^{-x}$
   b) $f'(x) = -\, e^{-x}$
   c) $f'(x) = (1 - x)\, e^{-x}$

5) On considère la suite géométrique (u_n) de premier terme $u_0 = 2$ et de raison $q = 1{,}05$. La somme S des 12 premiers termes de cette suite est donnée par

a) $S = 2 \times \frac{1-1{,}05^{12}}{1-1{,}05}$

b) $S = 2 \times \frac{1-1{,}05^{13}}{1-1{,}05}$

c) $S = 1{,}05 \times \frac{1-2^{12}}{1-2}$

Exercice 2 :

Une association confectionne et porte, chaque jour, à domicile, des repas à des personnes dépendantes.

Pour 2015, 600 personnes étaient abonnées à ce service.

Pour étudier son développement, cette association a fait une enquête selon laquelle l'évolution peut être modélisée de la façon suivante :

- Chaque année, 5 % des abonnements ne sont pas renouvelés
- Chaque année, on compte 80 nouveaux abonnements à ce service

1) Pour suivre l'évolution du nombre d'abonnés, un gestionnaire réalise l'algorithme suivant :

```
Variables :      n et U sont des nombres
Traitement :     Affecter à U la valeur 600
                 Affecter à n la valeur 0
                 Tant que U < 800 Faire
                    U prend la valeur U – U × 0.05 + 80
                    n prend la valeur n+1
                 FinTant que
Sortie :         Afficher n
```

a) Recopier, puis compléter, en le prolongeant avec autant de colonnes que nécessaire, le tableau ci-dessous (Arrondir les valeurs calculées à l'unité) :

Valeur de U	600		…
Valeur de n	0		…
Test U < 800	Vrai		…

b) Déterminer la valeur affichée en fin d'exécution de l'algorithme.
c) Interpréter ce résultat dans le contexte de l'énoncé.

2) Cette évolution peut s'étudier à l'aide d'une suite (u_n), où u_n est le nombre d'abonnés pendant l'année 2015 + n
On a ainsi, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0{,}95u_n + 80$ et $u_0 = 600$
   a) Donner u_1 et u_2 (Arrondir à l'unité)
   b) On introduit la suite (v_n) définie pour tout entier naturel n par : $v_n = u_n - 1\,600$.
   Montrer que (v_n) est une suite géométrique. (On donnera le premier terme et la raison)
   c) En déduire que l'on a, pour tout entier naturel n : $u_n = 1\,600 - 1\,000 \times 0{,}95^n$
3) La taille des locaux ne permet pas de servir plus de 1 000 repas. Si cette évolution se poursuit au même rythme, l'association devra-t-elle envisager un jour des travaux d'agrandissement ?

Exercice 3 :

Dans une usine, le coût total de fabrication de q centaines d'objets, en milliers d'euros, est égal à :

$$C(q) = \frac{1}{2} q + e^{-\frac{1}{2}q+\frac{3}{4}} \text{ sur } [1 ;50]$$

1) a) Etudier les variations de la fonction C
   b) En déduire le nombre d'objets que doit produire l'entreprise pour que le coût soit minimal.

2) Chaque objet est vendu au prix de 6 €

On suppose que toute la production est vendue.

a) Justifier que le bénéfice pour la vente de x centaines d'objets est, en milliers d'euros :

$$B(q) = \frac{1}{10}q - e^{-\frac{1}{2}q + \frac{3}{4}}$$

b) Etudier les variations de la fonction B et dresser son tableau de variation

c) A l'aide de la calculatrice, déterminer le nombre minimal d'objets que l'entreprise doit fabriquer pour réaliser un bénéfice.

d) Tracer à la calculatrice la courbe représentative de la fonction B et la droite d'équation y = 0,1q. Que constate-t-on ?

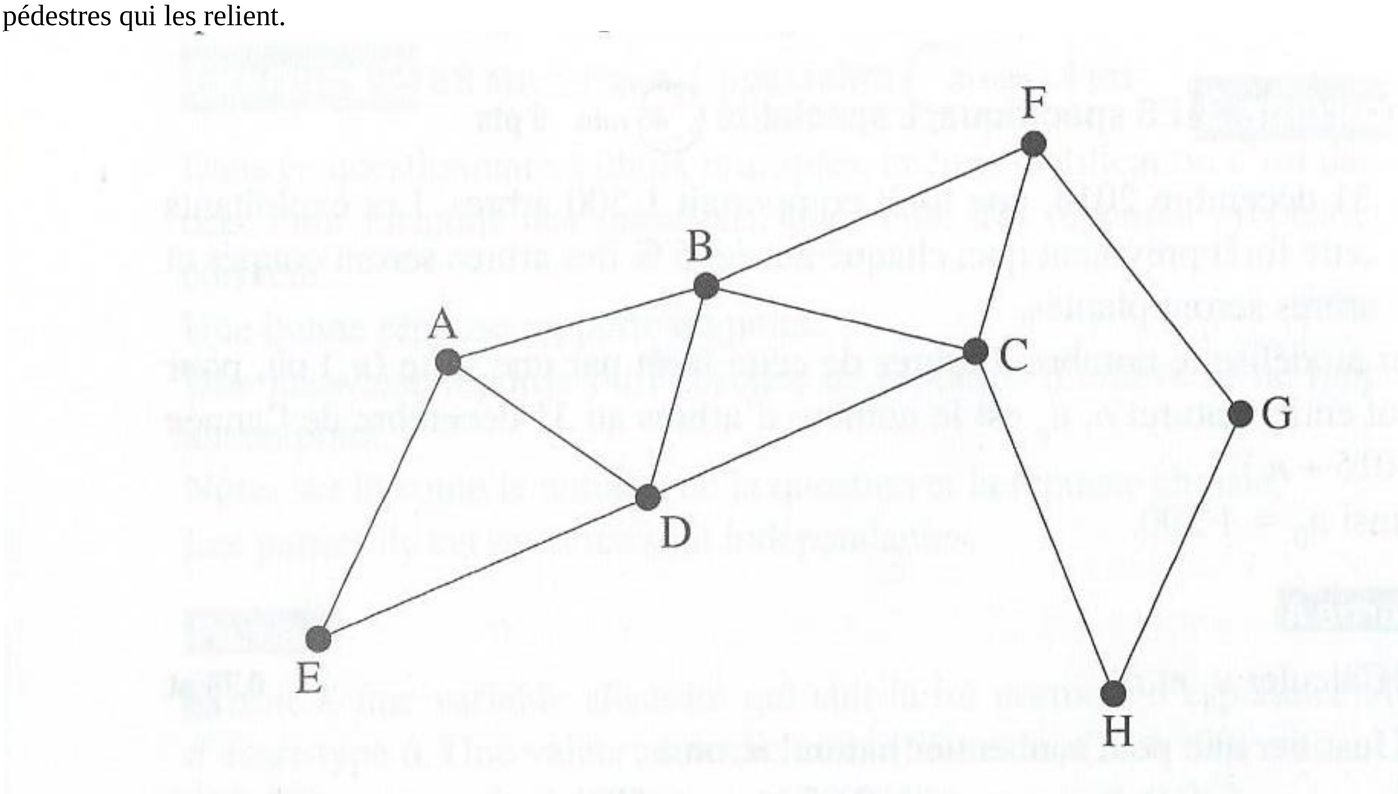
e) A l'aide de la calculatrice, déterminer à partir de quelle valeur de q la différence entre B(q) et 0,1q est inférieure à 10^{-3}

f) En déduire, sans la calculatrice, une approximation à l'unité près du bénéfice réalisé pour une production de 2 000 objets.

Exercice 4 : ***UNIQUEMENT Pour les élèves ayant suivi l'enseignement de spécialité mathématiques***

Un parc de loisirs décide d'ouvrir une nouvelle attraction pour les jeunes enfants : un parcours pédestre où chaque enfant doit recueillir, sur différents lieux, des indices pour résoudre une énigme. Le parcours est représenté par le graphe G ci-dessous.

Les sommets représentent les lieux où sont placés les indices ; les arêtes représentent des chemins pédestres qui les relient.



Partie A

1) a) Le graphe G est-il complet ? Justifier.
   b) Le graphe G est-il connexe ? Justifier.

2) Un enfant pourra-t-il parcourir chaque chemin pédestre du circuit une et une seule fois ? Si oui, indiquer un circuit possible et sinon expliquer pourquoi.

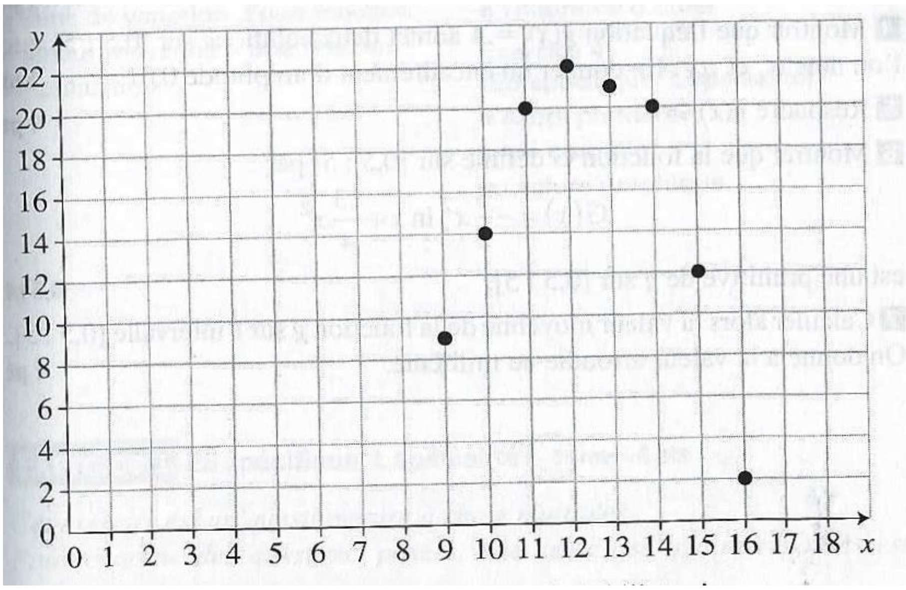
3) Donner la matrice M d'adjacence du graphe G (les sommets sont pris dans l'ordre alphabétique).
4) On donne la matrice M^4

$$M^4 = \begin{pmatrix} 20 & 18 & 20 & 21 & 11 & 13 & 5 & 5 \\ 18 & 32 & 25 & 25 & 17 & 16 & 10 & 10 \\ 20 & 25 & 31 & 19 & 13 & 13 & 14 & 5 \\ 21 & 25 & 19 & 31 & 13 & 21 & 4 & 12 \\ 11 & 17 & 13 & 13 & 11 & 6 & 4 & 3 \\ 13 & 16 & 13 & 21 & 6 & 20 & 3 & 13 \\ 5 & 10 & 14 & 4 & 4 & 3 & 9 & 1 \\ 5 & 10 & 5 & 12 & 3 & 13 & 1 & 10 \end{pmatrix}$$

Déterminer le nombre de parcours allant de E à H en 4 chemins pédestres.

Partie B

Afin d'améliorer la qualité de ses services, une étude statistique a relevé la durée moyenne d'attente en minutes à la billetterie du parc en fonction de l'heure. Ce relevé a eu lieu chaque heure de 9 h à 16 h. On obtient le relevé suivant :



Ainsi, à 10 h, il y avait 14 minutes d'attente à la billetterie.
On souhaite modéliser cette durée d'attente par une fonction qui, à l'heure, associe la durée d'attente en minutes. Ainsi, il sera possible d'avoir une estimation de la durée d'attente.

On choisit de modéliser cette situation à l'aide de la fonction f définie par :

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

avec a, b et c des réels et a non nul telle que les trois points A(9 ; 9), B(11 ; 20) et C (16 ; 2) appartiennent à la représentation graphique de f.

1) A partir des données de l'énoncé, écrire un système d'équations traduisant cette situation.
2) En déduire que le système précédent est équivalent à AX = R avec :

$$A = \begin{pmatrix} 81 & 9 & 1 \\ 121 & 11 & 1 \\ 256 & 16 & 1 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$ et R une matrice colonne que l'on précisera.

3) On admet que la matrice A est inversible.
   Déterminer, à l'aide de la calculatrice, les réels a, b et c.
4) En utilisant ce modèle, déterminer sur quelle(s) plage(s) horaire(s) l'attente peut être inférieure à 10 minutes ?

<u>Exercice 5 :</u> ***<u>UNIQUEMENT pour les élèves ne suivant pas la spécialité mathématiques</u>***

On considère la fonction f définie sur [-2 ;2] par $f(x) = a + xbe^{-2x+1}$, où a et b, sont deux entiers.

1) Sachant que f(0) = 3 et $f(1) = 3 - \frac{5}{e}$, calculer a et b
2) Montrer que $f'(x) = -5e^{-2x+1}(1 - 2x)$
3) Déterminer l'équation réduite de (T_{-1}) : droite tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse -1
4) Etudier les variations de f sur [-2 ;2]
5) Montrer que f admet un minimum sur [-2 ;2]. Quelle est sa valeur ? Pour quel x est-il atteint ? Justifier.
6) Montrer que l'équation f(x) = 1 admet une unique solution sur [-2 ;2]. Donner un encadrement de cette solution à 10^{-2} près en utilisant la calculatrice.