TES

Corrigé du bac blanc n° 2

(Fait le 05/04/18)

1

Exercice ①: (4 pts)

$$f(x) = 1 + \ln x \text{ , sur }]0;+\infty[$$

Affirmation ①:

$F(x) = x\ln x$. F est dérivable sur $]0;+\infty[$ et : on pose $u(x) = x$
$v(x) = \ln x$
$u'(x) = 1$
$v'(x) = \frac{1}{x}$

F est sous la forme $u \times v$ ①

alors $(u\times v)' = u'v + uv'$

d'où $F'(x) = 1\times \ln x + x \times \frac{1}{x} = \ln x + 1 = f(x)$, d'où F est une primitive de f.

de plus, $F(1) = 1 \times \ln 1 = 0$

Donc c'est vrai

Affirmation ②:

f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f'(x) = \frac{1}{x} > 0$, pour tout $x > 0$.

Donc f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$. ①

Donc c'est vrai

Affirmation ③:

$f(x) = 2$. f est continue sur $]0;+\infty[$ comme somme de fonctions continues sur $]0;+\infty[$.

① D'après l'affirmation ②, f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$ d'où, en particulier, sur $[1;10]$.

$f(1) = 1$ et $f(10) = 1 + \ln 10 \simeq 3,3 > 2$

d'où $2 \in [f(1); f(10)]$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution dans $[1;10]$

Donc c'est vrai

Affirmation 4 :

f est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f'(x) = \frac{1}{x}$ 1

f' est dérivable sur $]0;+\infty[$ et $f''(x) = -\frac{1}{x^2} < 0$, pour tout $x \in]0;+\infty[$

c'est-à-dire f est concave sur $]0;+\infty[$

Donc : Toutes les tangentes à $\mathcal{C}$ sont situées au-dessus de $\mathcal{C}$.

c'est-à-dire c'est faux

Exercice 2 : /5

Sur $[1;26]$: $f(t) = 24t\ln t - 3t^2 + 10$

1) $t \longmapsto t\ln t$ est dérivable sur $[1;26]$ comme produit de fonctions dérivables sur $[1;26]$ et $t \longmapsto -3t^2+10$ est dérivable sur $[1;26]$ (trinôme du second degré).

d'où f est dérivable sur $[1;26]$ comme somme de fonctions dérivables sur $[1;26]$.

1

Posons $u(t) = 24t$ $v(t) = \ln t$

$u'(t) = 24$ $v'(t) = \frac{1}{t}$

$(uv)' = u'v + uv'$

d'où $f'(t) = 24\ln t + 24t \times \frac{1}{t} - 3\times 2t$

$f'(t) = 24\ln t + 24 - 6t$, pour tout $t \in [1;26]$

2)

a) * Sur $[1;4]$: f' est strictement croissante sur cet intervalle.

f' étant continue sur $[1;26]$. 1

De plus, $f'(1) = -6+24 = 18$ $f'(4) = 24\ln 4 - 24 + 24$

$\simeq 33,3$

or, $0 \notin [f'(1); f'(4)]$. Les hypothèses du théorème des valeurs intermédiaires ne sont pas vérifiées, d'où $f'(t) = 0$ n'a pas de solution dans $[1;4]$

sur $[4;26]$:

f' est strictement décroissante sur cet intervalle.
f' est continue sur $[4;26]$.

De plus, $f'(4) = 24\ln 4 \simeq 33,3$ et $f'(26) = 24\ln 26 - 6\times 26 + 24 \simeq -53,8$

d'où $0 \in [f'(26)\,;\, f'(4)]$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f'(t) = 0$ admet une unique solution α dans l'intervalle $[4;26]$.

A la calculatrice : $\boxed{14 < \alpha < 15}$

b) Signe de $f'(t)$ sur $[1;26]$:

t	1		α		26
Signe de $f'(t)$		$+$	0	$-$	

$f'(1) = 18 > 0$

1

D'où les variations de f sur $[1;26]$:

t	1		α		26
Signe de $f'(t)$		$+$	0	$-$	
Variation de f	7	$\nearrow$	$f(\alpha)$	$\searrow$	$15,05$

$f(1) = -3 + 10 = 7$

$f(26) = 24\times 26\ln 26 - 3\times 26^2 + 10$
$\simeq 15,05$

1

3) a) sur $[4;26]$, f' est décroissante :
entre 4 et 26 semaines écoulées après le premier cas constaté, la vitesse de propagation de la maladie diminue.

b) Au bout de 15 semaines écoulées, le nombre de malades par semaine commence à diminuer.

1

Exercice 4 : /6

1) $f(4) = 6,5$ (lecture graphique) 0,25

$f'(4)$: coefficient directeur de la tangente à $(\mathcal{C})$ au point d'abscisse 4. Or, $x_A = 4$.

d'où $f'(4)$ = coefficient directeur de (AB)

0,5

$$= \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{0-6,5}{8-4} = \frac{-6,5}{4} = -\frac{13}{2} \times \frac{1}{4} = \boxed{-\frac{13}{8}} (=-1,625)$$

2) f est définie sur $[0;+\infty[$. Comme f est un quotient, f est dérivable partout où elle est définie.

f est dérivable sur $[0;+\infty[$

$$f(x) = \frac{a}{b+e^{0,5x-2}} = a \times \frac{1}{b+e^{0,5x-2}} \qquad u(x) = b + e^{0,5x-2}$$
$$u'(x) = 0,5e^{0,5x-2}$$

0,5

Or, $\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$, d'où $\underline{f'(x) = a \times \frac{-0,5e^{0,5x-2}}{(b+e^{0,5x-2})^2}}$

3) $f(4) = \frac{a}{b+e^0} = \frac{a}{b+1} = \frac{13}{2} \iff 2a = 13(b+1)$

$f'(4) = a \times \frac{-0,5}{(b+1)^2} = -\frac{13}{8} \iff \frac{a}{(b+1)^2} = \frac{13}{4}$

$$\begin{cases} a = \frac{13}{2}(b+1) \\ \frac{13}{2(b+1)} = \frac{13}{4} \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{13}{2}(b+1) \\ \frac{1}{b+1} = \frac{1}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} a = \frac{13}{2} \times 2 = \underline{13} \\ b = 2-1 = \underline{1} \end{cases}$$

0,75

Donc $\underline{f(x) = \frac{13}{1+e^{0,5x-2}}}$

4) a) $1 - e^{0,5x-2} \geq 0 \iff 1 \geq e^{0,5x-2} \iff \ln 1 \geq \ln e^{0,5x-2}$

(car $x \mapsto \ln x$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$)

$\Leftrightarrow 0 \geq 0{,}5x-2 \Leftrightarrow 2 \geq 0{,}5x$ (0,75)

$\Leftrightarrow 4 \geq x$

donc $S =]-\infty ; 4]$

b) $f''(x) = -\dfrac{13}{2}\left[\dfrac{0{,}5e^{0{,}5x-2}\left(1-e^{0{,}5x-2}\right)}{\left(1+e^{0{,}5x-2}\right)^3}\right]$

on a $\left(1+e^{0{,}5x-2}\right)^2 > 0$, pour tout $x \in [0;+\infty[$ (0,5)

$e^{0{,}5x-2} > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'où en particulier sur $[0;+\infty[$

De plus, $-\dfrac{13}{2} < 0$

D'après 4a), comme $1-e^{0{,}5x-2} \geq 0$, pour tout $x \leq 4$

alors $f''(x) \leq 0$ pour tout $x \leq 4$ et $f''(x) \geq 0$ pour tout $x \geq 4$

Autrement dit : $\boxed{\text{f est convexe sur } [4;+\infty[\text{ et concave sur } [0;4]}$

c) f'' s'annule et change de signe en $x = 4$ (0,5)

d'où (C) admet un point d'inflexion d'abscisse 4.

Donc $A(4 ; 6{,}5)$ est le point d'inflexion de (C)

Partie (B) :

$g(x) = e^{0{,}25x} - 1$, sur $[0;+\infty[$

1) g est dérivable sur $[0;+\infty[$ comme somme de fonctions dérivables sur $[0;+\infty[$

$g'(x) = 0{,}25e^{0{,}25x} > 0$ sur $[0;10]$, d'où g strictement croissante sur $[0;10]$

x	0		10
signe de $g'(x)$		+	
variation de g	0	↗	$e^{\frac{5}{2}}-1$

$g(0) = e^0 - 1 = 1 - 1 = 0$

$g(10) = e^{\frac{5}{2}} - 1 \simeq 11{,}2$

(0,75)

6

)a) $(f-g)'(x) = f'(x) - g'(x)$

$$= -\frac{13}{2}\frac{e^{0,5x-2}}{(1+e^{0,5x-2})^2} - 0,25e^{0,25x}$$ 0,5

or, $e^{0,5x-2} > 0$ et $(1+e^{0,5x-2})^2 > 0$, pour tout $x \in [0;10]$

De plus, $-\frac{13}{2} < 0$, d'où $-\frac{13}{2}\frac{e^{0,5x-2}}{(1+e^{0,5x-2})^2} < 0$

D'autre part, $-0,25e^{0,25x} < 0$

d'où $f'(x) - g'(x) < 0$

Donc $f-g$ strictement décroissante sur $[0;10]$

b) $f-g$ est continue sur $[0;10]$ comme différence de fonctions continues sur $[0;10]$. D'autre part, $f(0) = \frac{13}{1+e^{-2}} - \cancel{e^{0}} + \cancel{1}$

$$= \frac{13}{1+e^{-2}} \simeq 11,45$$

$$g(0) = e^0 - 1 = 0$$ 0,5

d'où $(f-g)(0) = \frac{13}{1+e^{-2}} \simeq 11,45$

$f(10) = \frac{13}{1+e^3}$ $g(10) = e^{\frac{5}{2}} - 1$

$$(f-g)(10) \simeq -10,57$$

$0 \in [(f-g)(10);(f-g)(0)]$

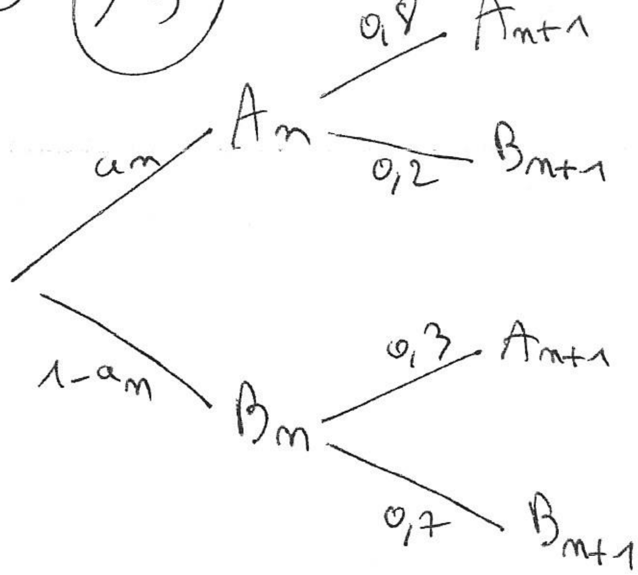
D'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)-g(x)=0$ admet une unique solution α dans $[0;10]$.

c) A la calculatrice. Au millième près :

$$\boxed{\alpha \simeq 6,006}$$ 0,5

Exercice (5) : /5

1) a)



$4\times0,25$

b) $a_{n+1} = P(A_{n+1}) = P(A_{n+1}\cap A_n) + P(A_{n+1}\cap B_n)$

1 $\quad = P_{A_n}(A_{n+1})\times P(A_n) + P_{B_n}(A_{n+1})\times P(B_n)$

$a_{n+1} = 0,8\times a_n + 0,3\times(1-a_n)$

$\Leftrightarrow \underline{a_{n+1}} = 0,8a_n - 0,3a_n + 0,3 = \underline{0,5a_n + 0,3}$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

2) $u_n = a_n - 0,6$

a) $u_{n+1} = a_{n+1} - 0,6 = 0,5a_n + 0,3 - 0,6$

$= 0,5a_n - 0,3$

1 $\quad = 0,5\left(a_n - \frac{0,3}{0,5}\right)$

$= 0,5(a_n - 0,6)$

$\underline{u_{n+1} = 0,5u_n}$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$

Donc (u_n) est une suite géométrique de raison $0,5$, et de premier terme $u_1 = a_1 - 0,6$
$= 0,7 - 0,6 = \underline{0,1}$

b) comme (u_n) est géométrique, $u_n = u_1\times q^{n-1}$

1 $\quad = 0,1\times 0,5^{n-1}$, $n\in\mathbb{N}^*$

Or, $\underline{a_n} = u_n + 0,6 = \underline{0,1\times0,5^{n-1} + 0,6}$, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

$0<0,5<1$, d'où $\lim\limits_{n\to+\infty} 0,5^{n-1} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \underline{0,6}$ 1

Plus ils jouent sur une longue période, plus le joueur A aura 1 probabilité de ... qui s'approchera de 0,6