

Exercice 1:

(5)

(1)

1) $g'(-2)$: coefficient directeur de la tangente à $(\mathcal{C}_g)$ au point d'abscisse -2

(c'est donc le coefficient directeur de la droite (AB))

$$\text{d'où } g'(-2) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{3 - 0}{-4 - (-2)} = \frac{3}{-2} = -1,5$$

D'où réponse (a)

2) $f(x) = 3(1-2x)e^{-2x^2+2x-1}$, est continue sur $\mathbb{R}$. Elle admet donc des primitives.

$$\text{On pose } u(x) = -2x^2 + 2x - 1 \quad u'(x) = -4x + 2 = 2x(1-2x)$$

$$f \text{ est du type: } \frac{3}{2} u' e^u \xrightarrow{\text{primitive}} \frac{3}{2} e^u$$

D'où $F(x) = \frac{3}{2} e^{-2x^2+2x-1} + k$, avec $k \in \mathbb{R}$ sont toutes les primitives de f sur $\mathbb{R}$.

On peut prendre, par exemple $k = 7$ réponse (a)

$$F(x) = \frac{3}{2} e^{-2x^2+2x-1} + 7 \text{ est une primitive de } f \text{ sur } \mathbb{R}$$

3) $a \neq 0$, $e^{-\frac{1}{a}} = \frac{1}{e^{\frac{1}{a}}}$ donc réponse (b)

4) $f(x) = x e^{-x}$ - f est dérivable sur $\mathbb{R}$, comme produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

$$\text{on pose } u(x) = x \quad v(x) = e^{-x}$$

$$u'(x) = 1 \quad v'(x) = -e^{-x}$$

$$\text{on a: } (uv)' = u'v + uv'$$

$$\text{d'où } f'(x) = e^{-x} - x e^{-x} = e^{-x}(1-x) \quad \text{réponse (c)}$$

$$5) S = \underbrace{u_0 + u_1 + \dots + u_{11}}_{\text{somme des 12 premiers termes}} = u_0 \times \frac{1-q^{12}}{1-q} = 2 \times \frac{1-1,05^{12}}{1-1,05}$$

réponse (a)

Exercice (2): (16)

(2)

1) a)

(1)

Valeur de u	600	650	698	743	785	826
Valeur de n	0	1	2	3	4	5
Test $u < 800$	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Vrai	Faux

(0,5) b) En fin d'exécution, l'algorithme affiche [5].

(0,5) c) Au bout de 5 ans, le nombre d'abonnés dépasse 800

$$2) \begin{cases} u_{n+1} = 0,95u_n + 80 \\ u_0 = 600 \end{cases}$$

a) $u_1 = 0,95 \times u_0 + 80$

(0,5+0,5) $= 0,95 \times 600 + 80 = \underline{650}$

$$\begin{aligned} u_2 &= 0,95 \times u_1 + 80 \\ &= 0,95 \times 650 + 80 \\ &\approx \underline{698} \end{aligned}$$

b) $v_n = u_n - 1600$

$v_{n+1} = u_{n+1} - 1600$

(1,5)
$$\begin{aligned} &= 0,95u_n + 80 - 1600 \\ &= 0,95u_n - 1520 \\ &= 0,95(u_n - 1600) \end{aligned}$$

$v_{n+1} = 0,95v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Donc (v_n) est une suite géométrique de raison 0,95, et de premier terme $v_0 = u_0 - 1600$

$= 600 - 1600 = \underline{-1000}$

c) Comme (v_n) est géométrique,

(0,75) $v_n = v_0 \times 0,95^n = -1000 \times 0,95^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Or, $u_n = v_n + 1600$

d'où $u_n = 1600 - 1000 \times 0,95^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

3) A l'aide de la calculatrice :

(0,25) Pour $n = 10$, $u_n \approx 1001,2 > 1000$. Il faudra donc émettre des travaux dans moins de 10 ans

Exercice (3):

$$C(q) = \frac{1}{2}q + e^{-\frac{1}{2}q + \frac{3}{4}} \sin[1; 50]$$

1) a) C est une fonction dérivable sur $[1; 50]$ comme somme de fonctions dérivables sur $[1; 50]$.

$$C'(q) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}q + \frac{3}{4}} \quad (\text{car si on pose } u(q) = -\frac{1}{2}q + \frac{3}{4} \\ u'(q) = -\frac{1}{2} \text{ et } (e^u)' = u' e^u).$$

(0,75)

$$1 - e^{-\frac{1}{2}q + \frac{3}{4}} \geq 0 \Leftrightarrow 1 \geq e^{-\frac{1}{2}q + \frac{3}{4}} \\ \Leftrightarrow e^0 \geq e^{-\frac{1}{2}q + \frac{3}{4}} \\ \Leftrightarrow 0 \geq -\frac{1}{2}q + \frac{3}{4} \quad (\text{car } e^a \geq e^b \Leftrightarrow a \geq b) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}q \geq \frac{3}{4} \\ \Leftrightarrow q \geq \frac{3}{2}$$

Donc $C'(q) \geq 0$, pour $q \in [\frac{3}{2}; 50]$

Tableau de variations:

q	1	$\frac{3}{2}$	50
signe de $C'(q)$	-	0	+
Variations de C			

$$C(1) = \frac{1}{2} + e^{-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}} \\ = \frac{1}{2} + e^{\frac{1}{4}} \\ C(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} + e^{-\frac{1}{2} \times \frac{3}{2} + \frac{3}{4}} \\ = \frac{3}{4} + 1 = \frac{7}{4}$$

$$C(50) = \frac{1}{2} \times 50 + e^{-\frac{1}{2} \times 50 + \frac{3}{4}} \\ = 25 + e^{-25 + \frac{3}{4}} \\ = 25 + e^{-\frac{97}{4}}$$

b) on a $C'(q) = 0$ pour $q = \frac{3}{2}$

(0,5) de plus C' change de signe en $q = \frac{3}{2}$

D'après les variations de C, en $q = \frac{3}{2}$,

C atteint son minimum -

$q = \frac{3}{2} = 1,5$ c'est-à-dire par $1,5 \times 100 = 150$ objets

2) $R(q) = 0,6q$

a) $B(q) = R(q) - C(q)$

(0,5)

$$= 0,6q - \left(\frac{1}{2}q + e^{-\frac{1}{2}q + \frac{3}{4}} \right) = \frac{6}{10}q - \frac{5}{10}q - e^{-\frac{1}{2}q + \frac{3}{4}}$$

$$B(q) = \frac{1}{10}q - e^{-\frac{1}{2}q + \frac{3}{4}}$$

b) $B(q) = \frac{1}{10}q - e^{-\frac{1}{2}q + \frac{3}{4}}$

(4)

B est dérivable sur $[1; 50]$ comme somme de fonctions dérivables sur $[1; 50]$

$$B'(q) = \frac{1}{10} + \frac{1}{2} e^{-\frac{1}{2}q + \frac{3}{4}}$$

(0,75)

Or, $e^{-\frac{1}{2}q + \frac{3}{4}} > 0$, pour tout $q \in [1; 50]$

d'où $B'(q) > 0$, pour tout $q \in [1; 50]$

Tableau de variations de B:

q	1	50
signe de $B'(q)$		+
Variation de B	$\frac{1}{10} - e^{\frac{1}{4}}$	$5 - e^{-\frac{91}{4}}$

$$\begin{aligned} B(1) &= \frac{1}{10} - e^{-\frac{1}{2} + \frac{3}{4}} \\ &= \frac{1}{10} - e^{\frac{1}{4}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B(50) &= \frac{1}{10} \times 50 - e^{-\frac{1}{2} \times 50 + \frac{3}{4}} \\ &= 5 - e^{-\frac{91}{4}} \end{aligned}$$

c) $\frac{1}{10} - e^{\frac{1}{4}} \approx -1,18 < 0$

et $5 - e^{-\frac{91}{4}} \approx 5,70$

(0,25)

A l'aide de la calculatrice, on trouve que $B(q) \approx 0$ pour $q \approx 357$ objets

d) on constate que la droite d'équation $y = 0,1q$ est toujours située en dessous de la courbe représentative de B

(0,5)

La droite se "approche" de la courbe de B.

e) $0,1q - B(q) = e^{-\frac{1}{2}q + \frac{3}{4}}$

(0,25) A la calculatrice, à partir de $q \approx 15,32$ centaines (= 1532 objets) d'objets, $0,1q - B(q) < 10^{-3}$

f) D'après la calculatrice, comme $20 > 15,32$, on peut approximer $B(q)$ par $0,1q$

(0,5)

D'où $0,1 \times 20 = 2$ c'est-à-dire : 2 000 € de bénéfice par 2000 objets

Exercice (5):

5

$$\text{Sur } [-2; 2], f(x) = a + xbe^{-2x+1} \quad a, b \in \mathbb{R}$$

1) $f(0) = 3 \Leftrightarrow \underline{a = 3}$

$$f(1) = 3 + be^{-1} = 3 - \frac{5}{e}$$

0,5 $\Leftrightarrow be^{-1} = -\frac{5}{e}$

$$\Leftrightarrow b = -5$$

Donc: $\underline{f(x) = 3 - 5xe^{-2x+1}}$

2) f est dérivable sur $[-2; 2]$ comme somme de fonctions dérivables sur $[-2; 2]$

0,5 On pose $u(x) = 5x$ $u'(x) = 5$
 $v(x) = e^{-2x+1}$ $v'(x) = -2e^{-2x+1}$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\text{d'où } f'(x) = -(5e^{-2x+1} - 10xe^{-2x+1})$$

$$\text{donc } \underline{f'(x) = -5e^{-2x+1}(1-2x)}$$

3) $(T_{-1}): y = f'(-1)(x+1) + f(-1)$

$$\text{or } f'(-1) = -5e^3(1+2) = -15e^3$$

0,5 $f(-1) = 3 + 5e^3$

$$\text{d'où } (T_{-1}): y = -15e^3(x+1) + 3 + 5e^3$$

$$\underline{y = -15e^3x + 3 - 10e^3}$$

4) Sur $[-2; 2]$:

$$e^{-2x+1} > 0 \text{ pour tout } x \in [-2; 2]$$

(2) d'où $-5e^{-2x+1} < 0$, pour tout $x \in [-2; 2]$.

$$1-2x > 0 \Leftrightarrow 2x < 1 \Leftrightarrow x < \frac{1}{2}$$

D'ici les variations de f sur $[-2; 2]$:

x	-2	$\frac{1}{2}$	2
Signe de $f'(x)$	-	0	+
Variations de f	$3+10e^5$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3e^3-10}{e^3}$

$$f(-2) = 3 - 5 \times (-2) e^5$$

$$= 3 + 10e^5$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 3 - \frac{5}{2} e^0$$

$$= 3 - \frac{5}{2} = \frac{1}{2}$$

$$f(2) = 3 - 5 \times 2 e^{-2 \times 2 + 1}$$

$$= 3 - 10 e^{-3}$$

$$= 3 - \frac{10}{e^3} = \frac{3e^3 - 10}{e^3}$$

5) $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 0$ et f' change de signe en $x = \frac{1}{2}$.

0,75 d'ici f admet un extremum local en $x = \frac{1}{2}$

D'après les variations de la question 4), c'est un minimum.

Le minimum vaut $\frac{1}{2}$ en $\frac{1}{2}$

6) f est continue sur $[-2; 2]$

* Elle est strictement décroissante sur $[-2; \frac{1}{2}]$

0,75 et $1 \in \left[\frac{1}{2}; 3+10e^5\right]$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires, $f(x) = 1$ admet une unique solution dans $[-2; \frac{1}{2}]$

De même, $f(x) = 1$ admet une unique solution dans $[\frac{1}{2}; 2]$

A l'aide de la calculatrice :

$$0,23 \leq \alpha_1 \leq 0,24$$

$$0,91 \leq \alpha_2 \leq 0,92$$