Corrigé BAC ES 2018

Exercice 1 :

Partie A : $\mu = 45$ $\sigma = 12$

1) a) $P(X=10) = \boxed{0}$ (si f est la densité de cette loi, $P(X=10) = \int_{10}^{10} f(x)\,dx$

b) $P(X \geq 45) = \boxed{\frac{1}{2}}$ (car $(\mathcal{C}_f)$ présente une symétrie d'axe la droite d'équation $x = \mu = 45$

et $P(X \geq 45) =$ Aire sous la courbe de f délimitée à gauche par la droite d'éq. $x = 45$)

c) $P(21 \leq X \leq 69) = P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma)$

$\simeq \boxed{0{,}95}$

d) $P(21 \leq X \leq 45) = \frac{1}{2} P(21 \leq X \leq 69)$ (par symétrie de $(\mathcal{C}_f)$ par rapport à la droite d'équation $x = 45$).

$\simeq \boxed{0{,}477}$

2) $P(30 \leq X \leq 60) \simeq \boxed{0{,}789}$
à la calculatrice

3) $P(X \leq a) = 0{,}30$. A la calculatrice :
on a $\boxed{a \simeq 39}$ (inv de la loi normale)

La probabilité d'attendre moins de 39 min est de 0,30

Partie B :

$p = 0{,}89$

$n = 300 \geq 30$, $n \times p = 300 \times 0{,}89 = 267 \geq 5$
$n \times (1-p) = 300 \times 0{,}11 = 33 \geq 5$

Les conditions sont vérifiées.

1) $I = \left[p - 1{,}96 \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} ; p + 1{,}96 \times \frac{\sqrt{p(1-p)}}{\sqrt{n}} \right]$

$$I = \left[0{,}89 - 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}89 \times 0{,}11}}{\sqrt{300}} \; ; \; 0{,}89 + 1{,}96 \times \frac{\sqrt{0{,}89 \times 0{,}11}}{\sqrt{300}}\right]$$

$$\simeq [0{,}855 \; ; \; 0{,}925]$$

2) $f = \frac{286}{300} \simeq 0{,}953$

Or, $I \simeq [0{,}855 \; ; \; 0{,}925]$

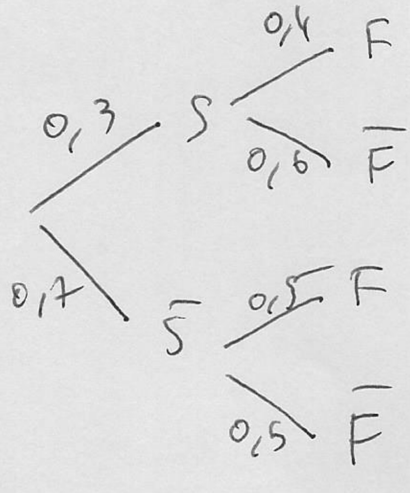
et $f \notin I$ donc cela remet en cause l'hypothèse au seuil de 95%.

Donc :
Le taux de satisfaction n'est pas resté stable entre 2013 et 2018

Exercice 2 :

Partie A :

1)



$P_{\overline{F}}(S)$: probabilité que l'élève soit inscrit dans un club de sport sachant que c'est un garçon.

Réponse a

2) $P(F) = 0{,}47$

$$P_F(S) = \frac{P(F \cap S)}{P(F)} = \frac{0{,}3 \times 0{,}4}{0{,}47} \simeq \boxed{0{,}255}$$ Réponse b

Partie B : $g(x) = -x^3 + 3x^2 - 1$

1) Notons (T_1) cette tangente.

$(T_1) : y = g'(1)(x-1) + g(1)$

or, $g'(x) = -3x^2 + 6x$
(g étant dérivable sur $[-1;4]$ car c'est une fonction polynôme).

$g'(1) = -3+6 = 3$

$g(1) = -1+3-1 = 1$

Donc $(T_1) : y = 3(x-1)+1$

$\Leftrightarrow \underline{y = 3x-2}$ $\boxed{\text{Réponse } b}$

2) Sur $[-1;a]$: g est continue car c'est une fonction polynôme. donc elle est intégrable sur cet intervalle.

et $m = \dfrac{1}{a+1}\displaystyle\int_{-1}^{a} g(x)\,dx = \dfrac{1}{a+1}\displaystyle\int_{-1}^{a}(-x^3+3x^2-1)\,dx$

Or, G définie par $G(x) = -\dfrac{x^4}{4}+x^3-x$ est une primitive de g sur $[-1;a]$.

$m = \dfrac{1}{a+1}\left[-\dfrac{x^4}{4}+x^3-x\right]_{-1}^{a}$

$= \dfrac{1}{a+1}\left[-\dfrac{a^4}{4}+a^3-a+\dfrac{1}{4}+1-1\right]$

Si $a=0$: $m \neq 0$ $\left(m = \dfrac{1}{4}\right)$

Si $a=1$: $m = \dfrac{1}{2}\times\left[\cancel{-\dfrac{1}{4}}\cancel{+1}\cancel{-1}\cancel{+\dfrac{1}{4}}\right] = \dfrac{1}{2}\times 0 = \boxed{0}$

$\boxed{\text{Réponse } b}$

Exercice 4 : $f(x) = (2x+1)e^{-2x}+3$, sur $[-2;4]$

1) $x \longmapsto e^{-2x}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, d'où en particulier sur $[-2;4]$

$x \longmapsto 2x+1$ est une fonction affine, elle est donc bien dérivable sur $[-2;4]$

d'où $x \longmapsto (2x+1)e^{-2x}$ est dérivable sur $[-2;4]$ comme produit de fonctions dérivables sur $[-2;4]$.

Donc f est dérivable sur $[-2;4]$

On pose $u(x) = 2x+1$ $\quad v(x) = e^{-2x}$

$u'(x) = 2$ $\quad v'(x) = -2e^{-2x}$

On a : $(uv)' = u'v + uv'$

d'où $f'(x) = 2e^{-2x} + (2x+1)\times(-2)e^{-2x}$

$$= \cancel{2e^{-2x}} - 4xe^{-2x} \cancel{-2e^{-2x}}$$

donc $\underline{f'(x) = -4xe^{-2x}}$

2) $e^{-2x} > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'où en particulier pour $x \in [-2;4]$

$-4x \geq 0 \iff x \leq 0$.

d'où par produit, $f'(x) \geq 0$, pour $x \in [-2;0]$

et $f'(x) < 0$, pour $x \in]0;4]$

D'où le tableau de variations de f :

x	-2		0		4
Signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variations de f	$-3e^4+3$	$\nearrow$	4	$\searrow$	$9e^{-8}+3$

$f(-2) = -3e^4 + 3 \simeq -160{,}8$

$f(0) = 4$

$f(4) = 9e^{-8} + 3 \simeq 3$

3) Sur $[-2;0]$:

- f est continue sur cet intervalle
- f est strictement monotone sur $[-2;0]$ (car strictement croissante)
- $f(-2) = 3 - 3e^4 \simeq -160{,}8 < 0$ et $f(0) = 4 > 0$

Autrement dit : $0 \in [f(-2) ; f(0)]$

D'après le théorème des valeurs intermédiaires,
l'équation $\underline{f(x)=0}$ admet une unique solution dans l'intervalle $[-2;0]$

A la calculatrice : $f(-0,9) \simeq -1,84$
$f(-0,8) \simeq 0,028$

valeur approchée de α telle que $f(\alpha)=0$:

$\boxed{\alpha \simeq -0,8}$

4) $f''(x) = (8x-4)e^{-2x}$, sur $[-2;4]$.

a) $e^{-2x} > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$, d'où en particulier pour $x \in [-2;4]$.

$8x-4 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{2}$

D'où, par produit, $f''(x) \geq 0$, pour tout $x \in \left[\frac{1}{2};4\right]$
et $f''(x) < 0$, pour tout $x \in \left[-2;\frac{1}{2}\right[$.

b) f est convexe $\Leftrightarrow f''$ positive.

D'après 4a), f est convexe sur $\left[\frac{1}{2};4\right]$

5) $g(x) = (2x+1)e^{-2x}$

a) $G(x) = (-x-1)e^{-2x}$

G est dérivable sur $[-2;4]$ comme produit de deux fonctions dérivables sur $[-2;4]$

On pose $u(x) = -x-1$ $\quad v(x) = e^{-2x}$
$u'(x) = -1$ $\quad v'(x) = -2e^{-2x}$

On a : $(uv)' = u'v + uv'$

d'où $\underline{G'(x)} = -1 \times e^{-2x} + (-x-1) \times (-2e^{-2x})$.

$= 2xe^{-2x} + 2e^{-2x} - e^{-2x}$

$= 2x e^{-2x} + e^{-2x}$

$= e^{-2x}(2x+1) = (2x+1)e^{-2x} = \underline{g(x)}$

Donc G est bien une primitive de g sur $[-2\,;4]$.

b) $f(x) = g(x) + 3$, d'où F définie par $F(x) = G(x) + 3x$ est une primitive de f sur $[-2\,;4]$.

c'est-à-dire :

$\underline{F(x) = (-x-1)e^{-2x} + 3x}$

6) a) voir annexe.

b) Par lecture graphique :

Aire (grd rectangle) $= 4 \times 1 = 4$ u.a

Aire (petit rectangle) $= 3 \times 1 = 3$ u.a.

D'où $\underline{3 < \mathcal{A} < 4}$

c) $\mathcal{A} = \int_0^1 f(x)\,dx = [F(x)]_0^1 = [(-x-1)e^{-2x} + 3x]_0^1$

$= -2e^{-2} + 3 + \underset{\overset{\shortparallel}{1}}{e^0}$

$= 4 - 2e^{-2}$

$= 4 - \frac{2}{e^2} \simeq \underline{3{,}73 \text{ u.a}}$

(Rque : on a bien $3{,}73 \in]3\,;4[$)