ÉVALUATION COMMUNE DE MATHÉMATIQUES N°3

NB : ***Le sujet ainsi que les feuilles de brouillon sont à remettre aux surveillants*.**

Vous préciserez le nom de votre professeur sur chaque copie :

- Pour **les exercices 1 et 2** inscrire le nom de **Mme SONNET-ROGISSART** ou de **Mme VIGOUR.**
- Pour **les exercices 3** et **4** inscrire le nom de **M. MANGEARD ou de M. NASSER.**

Exercice 1 : (/4 pts environ 15 min)

Les questions suivantes sont indépendantes les unes des autres.

1) En utilisant les formules du cours, simplifier l'expression suivante :
   $A = 20\ln\left(\sqrt{e}\right) - e^{-3\ln(3)}$

2) Résoudre les équations et inéquations suivantes après avoir déterminé leur domaine de définition :
   a) $e^{2x-5} = 2$
   b) $\ln(5x-9) - \ln(2x) \leq 0$
   c) $\ln(2x+1) + \ln(x-3) = \ln(x+5)$

3) Déterminer les entiers naturels n tels que : $1 - \left(\frac{3}{5}\right)^n \geq 0{,}999$

Exercice 2 : (/6 pts environ 30 min)

Partie A

On désigne par h la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$ par :

$$h(x) = 1 + \frac{\ln(x)}{x}$$

On admet que la fonction h est dérivable sur $]0\,;+\infty[$ et on note h' sa dérivée.

1) Déterminer les limites de h en 0 et $+\infty$.
2) Montrer que, pour tout nombre réel x de $]0\,;+\infty[$, $h'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$
3) En déduire les variations de h sur l'intervalle $]0\,;+\infty[$.
4) Montrer que l'équation $h(x) = 0$ admet une unique solution α appartenant à $]0\,;+\infty[$, et vérifier que : $\frac{1}{2} < \alpha < 1$
5) Déterminer le signe de h(x) pour x appartenant à $]0\,;+\infty[$.

Partie B

On désigne par f_1 et f_2 les fonctions définies sur $]0\,;+\infty[$, par :

$f_1(x) = x - 1 - \frac{\ln(x)}{x}$ et $f_2(x) = x - 2 - \frac{2\ln(x)}{x}$.

On note C_1 et C_2 les représentations graphiques de f_1 et f_2 dans un repère.

1) Montrer que, pour tout réel x appartenant à $]0\ ;+\infty[$, on a :

$$f_1(x) - f_2(x) = h(x).$$

2) Déduire des résultats de la partie A la position relative des courbes C_1 et C_2.
3) Justifier que leur unique point d'intersection a pour coordonnées $(\propto\ ;\ \propto)$.
   On rappelle que $\propto$ est l'unique solution de l'équation $h(x) = 0$.

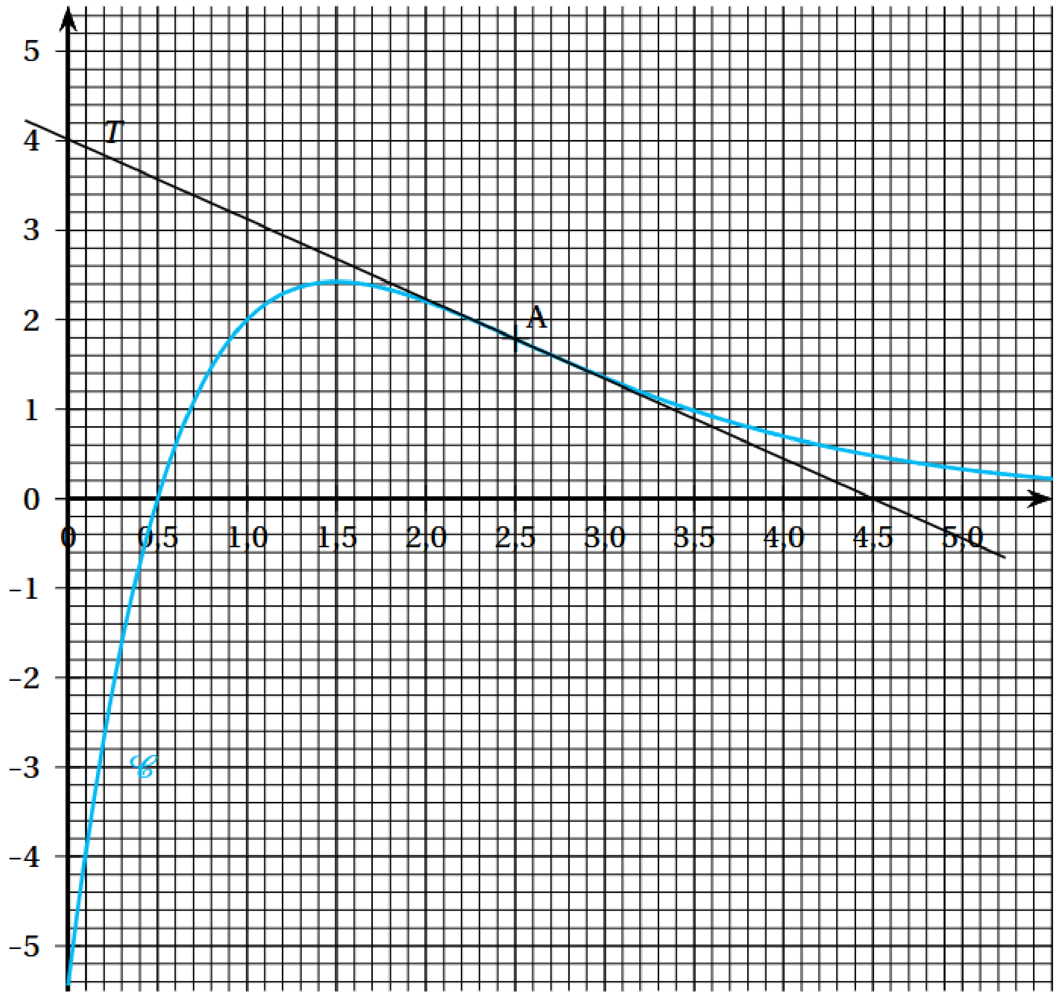
Exercice 3 : (/6 pts environ 30 min)

1) Vérifier que F est une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   $f(x) = (3x + 1)^2$ et $F(x) = 3x^3 + 3x^2 + x$
2) Déterminer une primitive de la fonction f définie par :
   $f(x) = 3(3x + 1)^4$
3) Déterminer les primitives de la fonction g définie par :
   $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$
4) Trouver la primitive H de la fonction h définie par $h(x) = x + \frac{1}{x^2}$ vérifiant $H(1) = \frac{5}{2}$

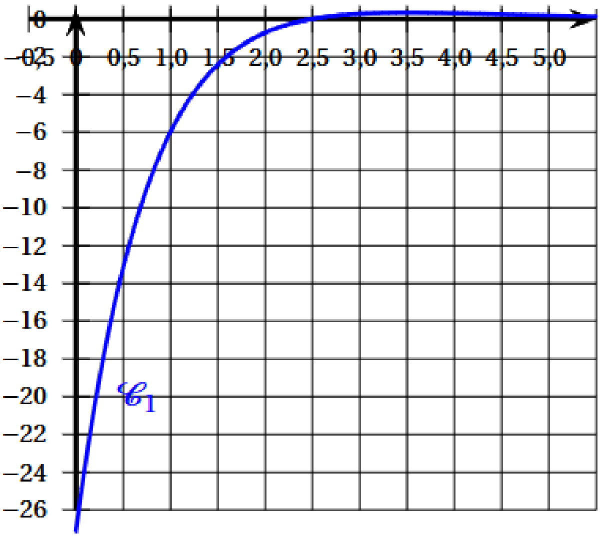
Exercice 4 : (/4 pts environ 15 min)

On considère une fonction f définie sur $[0\ ;+\infty[$, représentée par la courbe C ci-dessous.

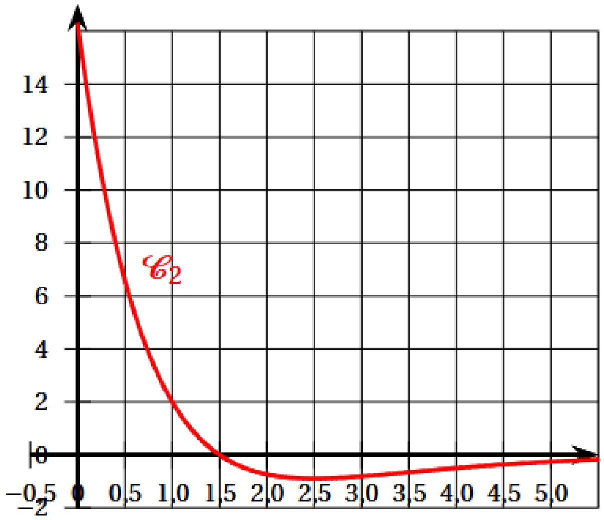
La droite T est tangente à la courbe C au point A d'abscisse $\frac{5}{2}$



1) Dresser, par lecture graphique, le tableau des variations de la fonction f sur l'intervalle [0 ; 5].
2) a) Etudier graphiquement la convexité de la fonction f.
   b) Que semble présenter la courbe C au point A ?
3) La dérivée f ′ et la dérivée seconde f ″ de la fonction f sont représentées par les courbes ci-dessous.
   Associer à chacune de ces deux fonctions la courbe qui la représente. Ce choix sera justifié.



Courbe $\mathscr{C}_1$



Courbe $\mathscr{C}_2$

4) La courbe C3 ci-dessous peut-elle être la représentation graphique sur [0 ; +∞[d'une primitive de la fonction f ? Justifier.