Spé Tale

Corrigé du bac Blanc (1) Sujet (2)

(Fait le 14/01/2025)

Exercice (1) :

$A(-3;1;3)$ $B(2;2;3)$ $C(1;7;-1)$

$D(-4;6;-1)$ $K(-3;14;14)$

1) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B-x_A \\ y_B-y_A \\ z_B-z_A \end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} x_C-x_D \\ y_C-y_D \\ z_C-z_D \end{pmatrix}$, d'où : $\overrightarrow{DC}\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} x_D-x_A \\ y_D-y_A \\ z_D-z_A \end{pmatrix}$, d'où : $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} -1 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix}$

b) Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{DC}$ ont les mêmes coordonnées, d'où : $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$

c'est-à-dire : ABCD est un parallélogramme

De plus : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AD} = x_{\overrightarrow{AB}}\times x_{\overrightarrow{AD}} + y_{\overrightarrow{AB}}\times y_{\overrightarrow{AD}} + z_{\overrightarrow{AB}}\times z_{\overrightarrow{AD}}$

$= 5\times(-1) + 1\times 5 + 0\times(-4)$

$= -5+5 = 0$, d'où $\overrightarrow{AB}\perp\overrightarrow{AD}$

Par conséquent : ABCD est un rectangle

c) Aire$(ABCD) = AB\times AD$

or, $AB = \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{x_{\overrightarrow{AB}}^2+y_{\overrightarrow{AB}}^2+z_{\overrightarrow{AB}}^2} = \sqrt{5^2+1^2}$

$=\sqrt{26}$

$$AD = \|\overrightarrow{AD}\| = \sqrt{x_{\overrightarrow{AD}}^2 + y_{\overrightarrow{AD}}^2 + z_{\overrightarrow{AD}}^2}$$
$$= \sqrt{(-1)^2 + 5^2 + (-4)^2}$$
$$= \sqrt{1 + 25 + 16}$$
$$= \sqrt{42}$$

Donc : $\underline{\text{Aire}(ABCD)} = \sqrt{26} \times \sqrt{42} = \underline{2\sqrt{273}}$

2) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}5\\1\\0\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-1\\5\\-4\end{pmatrix}$

On a $z_{\overrightarrow{AB}} = 0 \neq z_{\overrightarrow{AD}}$, d'où $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas colinéaires

c'est-à-dire : les points A, B et D ne sont pas alignés.

<u>Ils définissent donc un plan</u>

b) $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\10\\13\end{pmatrix}$ D'après 2 a), $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AD}$ sont deux vecteurs directeurs du plan (ABD)

On a : $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = x_{\vec{n}} \times x_{\overrightarrow{AB}} + y_{\vec{n}} \times y_{\overrightarrow{AB}} + z_{\vec{n}} \times z_{\overrightarrow{AB}}$

$= -2 \times 5 + 10 \times 1 + 13 \times 0$

$= -10 + 10 = 0$, d'où $\underline{\vec{n} \perp \overrightarrow{AB}}$

et : $\vec{n} \cdot \overrightarrow{AD} = x_{\vec{n}} \times x_{\overrightarrow{AB}} + y_{\vec{n}} \times y_{\overrightarrow{AD}} + z_{\vec{n}} \times z_{\overrightarrow{AB}}$

$= -2 \times (-1) + 10 \times 5 + 13 \times (-4)$

$= 2 + 50 - 52 = 0$, d'où $\underline{\vec{n} \perp \overrightarrow{AD}}$

D'où $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (ABD)

Donc : <u>$\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABD)</u>

c) D'après b), $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\10\\13\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABD)

on pose $\begin{cases} a=-2 \\ b=10 \\ c=13 \end{cases}$

et $-2x+10y+13z+d=0$ est une équation cartésienne du plan (ABD)

or, $A(-3;1;3) \in (ABD)$

$\Leftrightarrow -2x_A+10y_A+13z_A+d=0$

$\Leftrightarrow -2\times(-3)+10\times 1+13\times 3+d=0$

$\Leftrightarrow d=-55$

Donc : $\underline{-2x+10y+13z-55=0}$ <u>est une équation cartésienne du plan (ABD)</u>

3) a) $\vec{n}\begin{pmatrix}-2\\10\\13\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABD)

Il est donc vecteur directeur de toute droite orthogonale au plan (ABD)

En particulier : $\vec{n}$ est un vecteur directeur de la droite (Δ)

Soit $M(x;y;z) \in (\Delta)$:

$\overrightarrow{KM}\begin{pmatrix}x+3\\y-14\\z-14\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (Δ)

Or, deux vecteurs directeurs de la même droite sont colinéaires

D'où : $\overrightarrow{KM}=\lambda\vec{n}$, $\lambda\in\mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3=-2\lambda \\ y-14=10\lambda \\ z-14=13\lambda \end{cases}$, $\lambda\in\mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3-2\lambda \\ y = 14+10\lambda \quad , \lambda \in \mathbb{R} \\ z = 14+13\lambda \end{cases}$$

C'est une représentation paramétrique de la droite (Δ).

b) Le point I est le projeté orthogonal du point K sur (ABD)

Alors : $\{I\} = (\Delta) \cap (ABD)$

(I est le point d'intersection de (Δ) avec (ABD))

Posons $(x_I ; y_I ; z_I)$ les coordonnées de I :

comme $I \in (\Delta) \Leftrightarrow \exists \lambda \in \mathbb{R}, \begin{cases} x_I = -3-2\lambda \\ y_I = 14+10\lambda \\ z_I = 14+13\lambda \end{cases}$

De plus, $I \in (ABD) \Leftrightarrow -2x_I + 10y_I + 13z_I - 55 = 0$

$\Leftrightarrow -2(-3-2\lambda) + 10(14+10\lambda) + 13(14+13\lambda) - 55 = 0$

$\Leftrightarrow 273\lambda = -273$

$\Leftrightarrow \lambda = -1$

D'où : $\begin{cases} x_I = -3+2 = -1 \\ y_I = 14-10 = 4 \\ z_I = 14-13 = 1 \end{cases}$ Donc I a pour coordonnées : $(-1 ; 4 ; 1)$

c) Il faut calculer KI :

$KI = \sqrt{(x_I - x_K)^2 + (y_I - y_K)^2 + (z_I - z_K)^2}$

$= \sqrt{(-1+3)^2 + (4-14)^2 + (1-14)^2}$

$= \sqrt{4 + 100 + 169} = \sqrt{273}$

4) $V = \frac{1}{3} \times \text{Aire}(ABCD) \times KI$

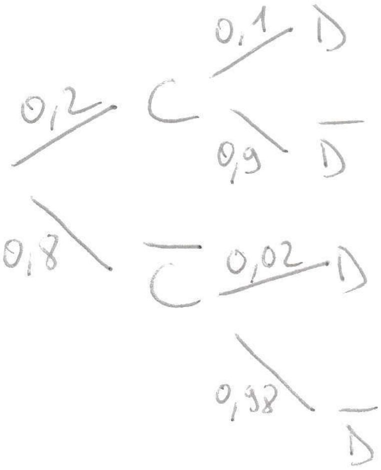
$= \frac{1}{3} \times 2\sqrt{273} \times \sqrt{273}$

Donc $\underline{V} = \frac{2 \times 273}{3} = \frac{2 \times \cancel{3} \times 91}{\cancel{3}} = \underline{182}$

Exercice (2) :

Partie (1) :

1)



on a $p(C \cap D) = p(C) \times p_C(D)$

$= 0,2 \times 0,1$

Donc : $\underline{p(C \cap D)} = \underline{0,02}$

2) $p(D) = p(D \cap C) + p(D \cap \overline{C})$

$= p(C) \times p_C(D) + p(\overline{C}) \times p_{\overline{C}}(D)$ (formule des probabilités totales)

$= 0,2 \times 0,1 + 0,8 \times 0,02$

Donc : $\underline{p(D) = 0,036}$

3) On a : $\underline{p_D(C)} = \frac{p(C \cap D)}{p(D)}$

$= \frac{0,02}{0,036} \simeq \underline{0,556}$

Partie (2)

1) $\underline{n = 35}$.

a) On répète 35 fois, de manière indépendante, la même épreuve de Bernoulli
(c'est la même car on assimile à un tirage avec remise)

→ Succès : le casque présente un défaut

→ Échec : le casque n'a pas de défaut

de paramètre $p = 0{,}036$

On a donc un schéma de Bernoulli

or, X compte le nombre de succès à l'issue des 35 épreuves

Donc : X suit une loi binomiale de paramètres $\begin{cases} n = 35 \\ p = 0{,}036 \end{cases}$

b) $p(X=1) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$ avec $\begin{cases} k = 1 \\ n = 35 \\ p = 0{,}036 \end{cases}$

Avec la calculatrice :

$p(X=1) \simeq 0{,}362$

c) $p(X \leq 1) \simeq 0{,}639$

Avec la calculatrice

Rque : $p(X \leq 1) = p(X=0) + p(X=1)$
$\simeq 0{,}277 + 0{,}362$
$\simeq 0{,}639$

2) n n'est pas fixé

$p(X \geq 1) \geq 0{,}99 \iff 1 - p(X < 1) \geq 0{,}99$

$\iff 1 - p(X=0) \geq 0{,}99$

$\iff p(X=0) \leq 1 - 0{,}99 = 0{,}01$

$\iff \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} \times 0{,}036^0 \times \underbrace{(1-0{,}036)}_{0{,}964}{}^n \leq 0{,}01$

$\iff 0{,}964^n \leq 0{,}01$

A l'aide de la calculatrice :
* pour $n = 125$, $0{,}964^n \simeq 0{,}0102 > 0{,}01$
* pour $n = 126$, $0{,}964^n \simeq 0{,}00986 < 0{,}01$

Donc : Il faut commander au moins 126 casques, pour avoir la bonne condition