Spé Maths Tale

Rattrapage du DS n° 2

géométrie dans l'espace

Représentations paramétriques de droites

1

(Fait le 07/11/24)

Exercice 1 : /7

Dans $(A ; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$

$\vec{BL} = 3\vec{BD}$ et $\vec{DK} = \frac{1}{4}\vec{DH}$

$\iff \vec{BA} + \vec{AL} = 3(\vec{BA} + \vec{AD})$ (relation de Chasles)

$\iff \vec{AL} = -2\vec{AB} + 3\vec{AD}$, d'où $L(-2 ; 3 ; 0)$ 1

et $\vec{DA} + \vec{AK} = \frac{1}{4}\vec{AE}$ (relation de Chasles et $\vec{AE} = \vec{DH}$)

$\iff \vec{AK} = \vec{AD} + \frac{1}{4}\vec{AE}$, d'où : $K(0 ; 1 ; \frac{1}{4})$ 1

2) On a $\vec{LK}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ \frac{1}{4} \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (LK) 1

soit $M(x ; y ; z) \in (LK)$: 1

$\vec{LM}\begin{pmatrix} x+2 \\ y-3 \\ z \end{pmatrix}$ est un autre vecteur directeur de (LK) 1

or, deux vecteurs directeurs de la même droite sont colinéaires 1

D'où : $\vec{LM} = k\vec{LK}$, $k \in \mathbb{R}$

$\iff \begin{cases} x+2 = 2k \\ y-3 = -2k \\ z = \frac{1}{4}k \end{cases}, k \in \mathbb{R} \iff \begin{cases} x = -2+2k \\ y = 3-2k \\ z = \frac{1}{4}k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$ 1

c'est une représentation paramétrique de la droite (KL)

Exercice 2 :

1) D'après les représentations paramétriques de (d_1) et (d_2) :

$\overrightarrow{u_1}\begin{pmatrix}-3\\4\\1\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{u_2}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ 1 + 1

2) Supposons que $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ soient colinéaires :

$\exists k \in \mathbb{R}^*$, $\overrightarrow{u_1} = k\overrightarrow{u_2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-3 = k\\ 4 = -k\\ 1 = 2k\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}k = -3\\ k = -4\\ k = \frac{1}{2}\end{cases}$, les k sont différents 1,5

D'où : $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires

Alors (d_1) et (d_2) ne sont ni confondues, ni parallèles

Supposons (d_1) et (d_2) sécantes :

Alors : $\begin{cases}5-3k = -1+t\\ 2+4k = 7-t\\ -1+k = -20+2t\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-3k - t = -6 & (1)\\ 4k + t = 5 & (2) \leftarrow (1)+(2)\\ -1+k = -20+2t\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}-3k - t = -6\\ k = -1\\ -1+k = -20+2t\end{cases}$

1,5

$\Leftrightarrow \begin{cases}t = -3k+6 = -3\times(-1)+6 = 9\\ k = -1\\ -1+(-1) = -2 \text{ et } -20+2\times 9 = -2\end{cases}$

d'où $-1+(-1) = -20+2\times 9$

c'est cohérent

Donc : (d_1) et (d_2) sont sécantes

au point $A(5-3\times(-1) ; 2+4\times(-1) ; -1-1)$

c'est-à-dire $A(8 ; -2 ; -2)$

Exercice 3 : $E(5;1;-2)$, $F(-1;-3;4)$ $G(1;-1;-2)$ 3

1) $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}-6\\-4\\6\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{EG}\begin{pmatrix}-4\\-2\\0\end{pmatrix}$ 1 + 1

2) On a $z_{\overrightarrow{EG}} = 0$, mais $z_{\overrightarrow{EF}} = 6 \neq 0$: il n'existe pas de réel $k \neq 0$,

$$z_{\overrightarrow{EF}} = k z_{\overrightarrow{EG}}$$

Autrement dit : il n'existe pas de réel $k \neq 0$,

$$\overrightarrow{EF} = k\overrightarrow{EG}$$ 1

Donc : $\overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{EG}$ ne sont pas colinéaires 1

Ce sont donc deux vecteurs directeurs du plan (EFG)

3) a) $E(5;1;-2)$. Supposons que $E \in (d)$:

Alors, il existe $t \in \mathbb{R}$, $\begin{cases} 5 = -3-2t \\ 1 = 1-4t \\ -2 = 6+17t \end{cases} \iff \begin{cases} 2t = -8 \iff t = -4 \\ t = 0 \\ 17t = -8 \iff t = -\frac{8}{17} \end{cases}$

1

C'est incohérent

Donc : $E \notin (d)$

b) soit $\vec{u}\begin{pmatrix}-2\\-4\\17\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d)

(obtenu à partir de la représentation paramétrique de (d) donnée)

Supposons qu'il existe $(d_1;d_2) \in \mathbb{R}^2$, tel que :

$$\vec{u} = d_1\overrightarrow{EF} + d_2\overrightarrow{EG}$$

$$\iff \begin{pmatrix}-2\\-4\\17\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-6d_1\\-4d_1\\6d_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4d_2\\-2d_2\\0\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -6d_1 - 4d_2 = -2 & L_1 \leftarrow \frac{L_1}{-2} \\ -4d_1 - 2d_2 = -4 & L_2 \leftarrow \frac{L_2}{-2} \\ 6d_1 = 17 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3d_1 + 2d_2 = 1 \\ 2d_1 + d_2 = 2 \\ d_1 = \frac{17}{6} \end{cases}$$

3

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 \times \frac{17}{6} + 2 \times \left(-\frac{11}{3}\right) = \frac{17}{2} - \frac{22}{3} = \frac{51}{6} - \frac{44}{6} = \frac{7}{6} \neq 1 \\ d_2 = 2 - 2d_1 = 2 - 2 \times \frac{17}{6} = \frac{6}{3} - \frac{17}{3} = -\frac{11}{3} \\ d_1 = \frac{17}{6} \end{cases}$$

système incohérent

Donc: $\vec{u}$, $\vec{EF}$, $\vec{EG}$ ne sont pas coplanaires

c'est-à-dire : $(d) \not\parallel (EFG)$

Par conséquent : (d) et (EFG) sont sécants