

Exercice (1): $R(1; -2; 3)$ $S(-4; 2; -1)$

$$\overrightarrow{RS} \begin{pmatrix} x_S - x_R \\ y_S - y_R \\ z_S - z_R \end{pmatrix}, \text{ d'où } \overrightarrow{RS} \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de } (RS)$$

Soit $M(x; y; z) \in (RS)$:

$$\text{on a: } \overrightarrow{RM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \\ z-3 \end{pmatrix} \text{ est un autre vecteur directeur de } (RS)$$

On, deux vecteurs directeurs de la même droite sont colinéaires

$$\text{Autrement dit: } \overrightarrow{RM} = \lambda \overrightarrow{RS}, \lambda \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = -5\lambda \\ y+2 = 4\lambda \\ z-3 = -4\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1-5\lambda \\ y = -2+4\lambda \\ z = 3-4\lambda \end{cases}, \lambda \in \mathbb{R}$$

c'est une représentation paramétrique
de la droite (RS)

Exercice (2):
 $(d_1): \begin{cases} x = 1+t \\ y = -3-t \\ z = 2+2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \quad \left| \quad (d_2): \begin{cases} x = k \\ y = -1-2k \\ z = 1+3k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

$$\text{on a: } \vec{u}_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de } (d_1)$$

$$\text{et } \vec{u}_2 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de } (d_2)$$

$$\text{On suppose qu'il existe } \lambda \in \mathbb{R}^*, \vec{u}_2 = \lambda \vec{u}_1$$

c'est-à-dire: $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ -d \\ 2d \end{pmatrix}$

(2)

$(\Rightarrow) \begin{cases} d = 1 \\ d = 2 \\ d = \frac{3}{2} \end{cases}$, ils sont tous différents

donc $\vec{u}_1$ et $\vec{u}_2$ ne sont pas colinéaires

Donc: (d_1) et (d_2) sont ni confondues, ni parallèles.

Étudions l'éventuelle intersection de (d_1) avec (d_2) .

Alors: $\begin{cases} 1+t = k \\ -3-t = -1-2k \\ 2+2t = 1+3k \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} t-k = -1 \\ -t+2k = 2 \\ 2t-3k = -1 \end{cases} \quad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$

par combinaison:

$(\Rightarrow) \begin{cases} t-k = -1 \\ k = 1 \\ 2t-3k = -1 \end{cases}$

$(\Rightarrow) \begin{cases} t = -1+1=0 \\ k = 1 \\ 2 \times 0 - 3 \times 1 = -3 \neq -1 \end{cases}$ système incohérent.

D'où $(d_1) \cap (d_2) = \emptyset$

Par conséquent: (d_1) et (d_2) sont non-coplanaires

Exercice (3): $(d): \begin{cases} x = 2+t \\ y = -1-t \\ z = 5+3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

1) D'après la représentation paramétrique ci-dessus, $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d)

2) $A(5; -1; 4) \quad B(-2; 1; 0) \quad C(2; 0; -5)$

(3)

a) $\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}, \text{ d'où: } \vec{AB} \begin{pmatrix} -7 \\ 2 \\ -4 \end{pmatrix}$

De même: $\vec{AC} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ -9 \end{pmatrix}$

b) Supposons qu'il existe $d \in \mathbb{R}^*$, $\vec{AC} = d \vec{AB}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -3 = -7d \\ 1 = 2d \\ -9 = -4d \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} d = \frac{3}{7} \\ d = \frac{1}{2} \\ d = \frac{9}{4} \end{cases}$

Les d sont différents

D'où: $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ non colinéaires (= les points A, B et C ne sont pas alignés)

On a donc deux vecteurs directeurs du plan (ABC)

c) D'après 2 b), $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ ne sont pas colinéaires.

Supposons qu'il existe $(d_1; d_2) \in \mathbb{R}^2$,

$\vec{u} = d_1 \vec{AB} + d_2 \vec{AC}$

$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 37 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7d_1 \\ 2d_1 \\ -4d_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3d_2 \\ d_2 \\ -9d_2 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -7d_1 - 3d_2 = 1 \\ 2d_1 + d_2 = -1 \\ -4d_1 - 9d_2 = 37 \end{cases}$

Résolution par substitution:

(4)

$$\begin{cases} -7d_1 - 3(-2d_1 - 1) = 1 \\ d_2 = -2d_1 - 1 \\ -4d_1 - 9d_2 = 37 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -d_1 = 1 - 3 = -2 \Leftrightarrow d_1 = 2 \\ d_2 = -2 \times 2 - 1 = -5 \\ -4 \times 2 - 9 \times (-5) = -8 + 45 = 37 \end{cases} \text{ Le système est donc cohérent}$$

$$\text{D'où : } \vec{u} = 2\vec{AB} - 5\vec{AC}$$

c'est-à-dire : les vecteurs $\vec{u}$, $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont coplanaires

comme $\vec{u}$ est un vecteur directeur de (d)

et $\vec{AB}, \vec{AC}$, deux vecteurs directeurs du plan (ABC)

Par conséquent : $(d) \parallel (ABC)$ (car $A(5; -1; 4) \notin (d)$)

(= la droite (d) est parallèle au plan (ABC)).