

Exercice (3): (6pts)

1) $f(x) = (3x+1)^2$

f est continue sur $\mathbb{R}$, car c'est une fonction polynôme : elle y admet donc des primitives.

Soit $F(x) = 3x^3 + 3x^2 + x$

F est dérivable sur $\mathbb{R}$, car c'est une fonction polynôme ①

$$F'(x) = 3 \times 3x^2 + 3 \times 2x + 1 = 9x^2 + 6x + 1$$

$$\text{or, } f(x) = (3x)^2 + 2 \times 3x \times 1 + 1^2 \\ = 9x^2 + 6x + 1$$

D'où : $F'(x) = f(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

2) Soit $f(x) = 3(3x+1)^4$

f étant une fonction polynôme, elle est continue sur $\mathbb{R}$
elle y admet donc des primitives.

On pose : $u(x) = 3x+1$

$$u'(x) = 3$$

D'où : $f(x) = u'(x)[u(x)]^4$

$$\text{or, } u' u^m \text{ se primitive en } \frac{u^{m+1}}{m+1} \quad (\text{ici } m=4)$$

$$\text{On peut prendre } \underline{F(x) = \frac{1}{5} \times (3x+1)^5 = \frac{(3x+1)^5}{5}}$$

F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

3) $g(x) = \frac{1}{\sqrt{2x-3}}$

g est définie si et seulement si $2x-3 > 0$

$\Leftrightarrow x > \frac{3}{2}$

c'est-à-dire : g est définie sur $\left] \frac{3}{2}; +\infty \right[$

g est continue sur $\left] \frac{3}{2}; +\infty \right[$: elle y admet donc des primitives

On pose $u(x) = 2x-3$

$u'(x) = 2$

(2)

alors : $g(x) = \frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} \times \frac{1}{2}$

or, $\frac{u'}{\sqrt{u}}$ se primitive en $2\sqrt{u} + K$, $K \in \mathbb{R}$

D'où : Les primitives de g sur $\left] \frac{3}{2}; +\infty \right[$ sont les fonctions G_K définies sur $\left] \frac{3}{2}; +\infty \right[$ par :

$G_K(x) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{u(x)} + K, K \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \underline{G_K(x) = \sqrt{2x-3} + K, K \in \mathbb{R}}$

4) $h(x) = x + \frac{1}{x^2}$ h est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$

Elle y admet donc des primitives

$H(x) = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{x} + K$, avec $K \in \mathbb{R}$ (c'est la forme générale des primitives de h sur $\mathbb{R}^*$)

or, $H(1) = \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} - 1 + K = \frac{5}{2}$

$\Leftrightarrow K = \frac{5}{2} - \frac{1}{2} + \frac{2}{2} = 3$

(1,5)

Donc : $H(x) = \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{x} + 3$

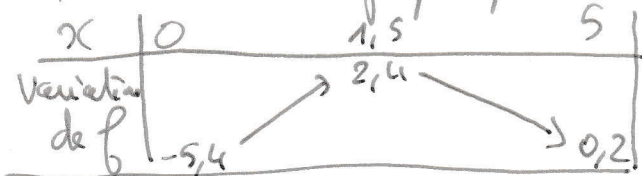
Exercice (4): 4 pts

3

$D_f = [0; +\infty[$ C : courbe représentative de f

T : tangente à C au point A d'abscisse $\frac{5}{2}$

1) Par lecture graphique:



0,75

2) Graphiquement:

* La courbe C est située sous ses tangentes pour $x \in [0; 2,5]$
d'où f est concave sur cet intervalle

0,25

* La courbe C est située au-dessus de ses tangentes pour $x \in [2,5; 5]$, d'où f est convexe sur cet intervalle

0,25

b) Au point A , f semble changer de convexité
donc C présente un point d'inflexion en A

0,25

3) D'après 2), en $x = 2,5$, f change de convexité

- Just $\rightarrow$ 0,75 d'où f'' s'annule (et) change de signe en $x = 2,5$

- rep $\rightarrow$ 0,25

Donc: C_1 représente f'' et donc C_2 représente f'

(en $x = 1,5$, f' s'annule et change de signe: donc f admet bien un extremum local en $x = 1,5$)

4) Sur $[0; +\infty[$:

on suppose que C_3 est la courbe représentative d'une fonction F

sur $[0; 0,5]$, F est croissante, c'est-à-dire $F'(x) \geq 0$, pour tout $x \in [0; 0,5]$

Just $\rightarrow$ 0,75

rep $\rightarrow$ 0,5 car, si F est une primitive de f sur $[0; +\infty[$,

$F'(x) = f(x)$, c'est-à-dire $f(x) \geq 0$ sur $[0; 0,5]$

or, ce n'est pas le cas d'après C . - {Donc C_3 ne peut pas être la représent. graph. d'une primitive de f }