Spé Tale

Corrigé partiel du DS commun

(partie Nasser / Mangeard) Jeudi 20/03/25

Exercice 3 : (6pts)

1) $f(x) = (3x+1)^2$

f est continue sur $\mathbb{R}$, car c'est une fonction polynôme : elle y admet donc des primitives.

Soit $F(x) = 3x^3 + 3x^2 + x$

F est dérivable sur $\mathbb{R}$, car c'est une fonction polynôme (1)

$F'(x) = 3\times 3x^2 + 3\times 2x + 1 = 9x^2 + 6x + 1$

or, $f(x) = (3x)^2 + 2\times 3x \times 1 + 1^2$

$= 9x^2 + 6x + 1$

D'où : $F'(x) = f(x)$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

Donc F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

2) Soit $f(x) = 3(3x+1)^4$

f étant une fonction polynôme, elle est continue sur $\mathbb{R}$ elle y admet donc des primitives.

On pose : $u(x) = 3x+1$ (1,5)

$u'(x) = 3$

D'où : $f(x) = u'(x)[u(x)]^4$

or, $u'u^n$ se primitive en $\frac{u^{n+1}}{n+1}$ (ici $n = 4$)

On peut prendre $F(x) = \frac{1}{5} \times (3x+1)^5 = \frac{(3x+1)^5}{5}$ F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

3) $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2x-3}}$

g est définie si et seulement si $2x-3>0$

$\iff x > \dfrac{3}{2}$

c'est-à-dire : g est définie sur $\left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[$

g est continue sur $\left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[$: elle y admet donc des primitives

On pose $u(x) = 2x-3$

$u'(x) = 2$

alors : $g(x) = \dfrac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}} \times \dfrac{1}{2}$

or, $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ se primitive en $2\sqrt{u} + K$, $K \in \mathbb{R}$

D'où : Les primitives de g sur $\left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[$ sont les fonctions G_K définies sur $\left]\dfrac{3}{2};+\infty\right[$ par :

$$G_K(x) = \frac{1}{\cancel{2}} \times \cancel{2}\sqrt{u(x)} + K,\ K \in \mathbb{R}$$

$$\iff \underline{G_K(x) = \sqrt{2x-3} + K,\ K \in \mathbb{R}}$$

4) $h(x) = x + \dfrac{1}{x^2}$ h est définie et continue sur $\mathbb{R}^*$

Elle y admet donc des primitives

$H(x) = \dfrac{x^2}{2} - \dfrac{1}{x} + K$, avec $K \in \mathbb{R}$ (c'est la forme générale des primitives de h sur $\mathbb{R}^*$)

or, $H(1) = \dfrac{5}{2} \iff \dfrac{1}{2} - 1 + K = \dfrac{5}{2}$

$\iff K = \dfrac{5}{2} - \dfrac{1}{2} + \dfrac{2}{2} = 3$

1,5

Donc : $H(x) = \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{x} + 3$

Exercice (4) : /4 pts

$D_f = [0 ; +\infty[$ C : courbe représentative de f

T : tangente à C au point A d'abscisse $\frac{5}{2}$

1) Par lecture graphique : (0,75)

x	0	1,5	5
Variation de f	$-5,4$ ↗	2,4 ↘	0,2

2) Graphiquement :

a) * La courbe C est située sous ses tangentes pour $x \in [0 ; 2,5]$ (0,25)

d'où f est concave sur cet intervalle

* La courbe C est située au-dessus de ses tangentes pour $x \in [2,5 ; 5]$, d'où f est convexe sur cet intervalle (0,25)

b) Au point A, f semble changer de convexité (0,25)

donc C présente un point d'inflexion en A

3) D'après 2), en $x = 2,5$, f change de convexité

- Just → 0,75
- rép → 0,25

d'où f'' s'annule $\boxed{\text{et}}$ change de signe en $x = 2,5$

Donc : $\mathcal{C}_1$ représente f'' et donc $\mathcal{C}_2$ représente f'

(en $x = 1,5$, f' s'annule et change de signe : donc f admet bien un extremum local en $x = 1,5$)

4) Sur $[0 ; +\infty[$:

On suppose que $\mathcal{C}_3$ est la courbe représentative d'une fonction F

sur $[0 ; 0,5]$, F est croissante, c'est-à-dire $F'(x) \geq 0$, pour tout $x \in [0 ; 0,5]$

Just → 0,75

rép → 0,5 or, si F est une primitive de f sur $[0 ; +\infty[$,

$F'(x) = f(x)$, c'est-à-dire $f(x) \geq 0$ sur $[0 ; 0,5]$

or, ce n'est pas le cas d'après C - Donc $\mathcal{C}_3$ ne peut pas être la représent. graph. d'une primitive de f