

Exercice (1):1) D'après le tableau de signe de $f''(x)$:

$$f''(x) \leq 0, \text{ pour tout } x \in]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$$

donc f est concave sur $]-\infty; -1] \cup [2; +\infty[$

$$f''(x) \geq 0, \text{ pour tout } x \in [-1; 2]$$

donc f est convexe sur $[-1; 2]$ 2) $f''(x)$ s'annule et change de signe en $x = -1$ et en $x = 2$ Donc: $(\mathcal{C}_f)$ présente deux points d'inflexion
(l'un d'abscisse -1 , l'autre d'abscisse 2)Exercice (2):

1) a) $f_1(x) = \sqrt{1+e^{-x^2}}$, f_1 est définie sur $\mathbb{R}$

On pose: $u(x) = 1+e^{-x^2}$, on a $u(x) \neq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$
d'où f_1 est dérivable sur $\mathbb{R}$

On pose: $v(x) = -x^2$
 $v'(x) = -2x$ } on a: $(e^{v(x)})' = v'(x) e^{v(x)}$
d'où: $(e^{-x^2})' = -2x e^{-x^2}$

d'où: $u'(x) = -2x e^{-x^2}$

or, $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$, d'où: $f_1'(x) = \frac{-2x e^{-x^2}}{2\sqrt{1+e^{-x^2}}} = \frac{-x e^{-x^2}}{\sqrt{1+e^{-x^2}}}$

b) $f_2(x) = (x^4 + 3x^2)^5$, f_2 est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$, car c'est une fonction polynôme (2)

on pose: $u(x) = x^4 + 3x^2$

$$u'(x) = 4x^3 + 3 \times 2x = 4x^3 + 6x$$

or, $(u^n)' = n u' u^{n-1}$

Donc: $f_2'(x) = 5 \times (4x^3 + 6x) \times (x^4 + 3x^2)^4$

Donc: $f_2'(x) = 5 \times 2x(2x^2 + 3)(x^4 + 3x^2)^4$

2) $f_1'(x) = \frac{-x e^{-x^2}}{\sqrt{1+e^{-x^2}}}$, or, $\frac{e^{-x^2}}{\sqrt{1+e^{-x^2}}} > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ } $f_1'(x) \geq 0$, pour tout $x \leq 0$
 et $f_1'(x) \leq 0$, pour tout $x \geq 0$
 $-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 0$

Exercice (3):

1) (D) est la tangente à la courbe (C) au point d'abscisse 0

(D) est oblique et passe par l'origine du repère, alors:

(D) a une équation réduite de la forme:

$$y = mx$$

avec $m = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{+1}{+0,5} = 2$

Donc: (D) a pour équation réduite

$$\underline{y = 2x}$$

2) (T) est la tangente à (C) au point d'abscisse 1

or, (T) est horizontale, d'où son coefficient directeur est égal à 0

Donc: $\underline{f_1'(1) = 0}$

3) Par lecture graphique, (C) semble situer sous ses tangentes (3)
sur l'intervalle $[0; 1,75]$

f semble donc concave sur $[0; 1,75]$

Partie (B)

$$f(x) = 2xe^{-0,5x^2} \quad \text{sur } [0; 3]$$

1) f est dérivable sur $[0; 3]$ car c'est le produit de deux fonctions dérivables sur $[0; 3]$

$$\text{on pose: } u(x) = 2x \quad v(x) = e^{-0,5x^2}$$

$$\text{on a: } v(x) = e^{w(x)} \quad \text{avec } w(x) = -0,5x^2$$

$$w'(x) = -0,5 \times 2x = -x$$

$$\begin{aligned} \text{Alors: } v'(x) &= [e^{w(x)}]' = w'(x) e^{w(x)} \\ &= -x e^{-0,5x^2} \end{aligned}$$

$$u'(x) = 2$$

$$\text{or, } (uv)' = u'v + uv'$$

$$\text{Donc: } f'(x) = 2e^{-0,5x^2} + 2x \times (-x e^{-0,5x^2})$$

$$= 2e^{-0,5x^2} - 2x^2 e^{-0,5x^2}$$

$$\text{Donc: } \underline{f'(x) = (2 - 2x^2) e^{-0,5x^2}}$$

$$2) f'(x) = (2 - 2x^2)e^{-0,5x^2}$$

(4)

f' est dérivable sur $[0; 3]$ car c'est le produit de deux fonctions dérivables sur $[0; 3]$

on pose: $u(x) = 2 - 2x^2$ $v(x) = e^{-0,5x^2}$

$u'(x) = -4x$ $v'(x) = -xe^{-0,5x^2}$ (d'après 1))

or, $(uv)' = u'v + uv'$

d'où: $f''(x) = -4xe^{-0,5x^2} - (2 - 2x^2)xe^{-0,5x^2}$
 $= 2xe^{-0,5x^2}(-2 - (1 - x^2))$

Donc: $f''(x) = 2xe^{-0,5x^2}(x^2 - 3)$

comme $x \in [0; 3]$, $2xe^{-0,5x^2} \geq 0$

on a: $x^2 - 3 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 \geq 3 \Leftrightarrow x \in [\sqrt{3}; 3]$

(car $x \in [0; 3]$)

N'ait: $f''(x) \geq 0$, pour tout $x \in [\sqrt{3}; 3]$

c'est-à-dire: f est convexe sur $[\sqrt{3}; 3]$

* $f''(x) \leq 0$, pour tout $x \in [0; \sqrt{3}]$

c'est-à-dire: f est concave sur $[0; \sqrt{3}]$