Spé Tale

Corrigé du DS 1

(Fait le 30/09/24)

Rappels de 1ère / Géométrie dans l'espace

Exercice 1 : (Rappels)

1) $A(6;-4)$ $B(-3;5)$

Soit $M(x;y) \in (AB)$:

$\vec{AM}\begin{pmatrix} x-6 \\ y+4 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (AB)

$\vec{AB}\begin{pmatrix} -3-6 \\ 5+4 \end{pmatrix}$, d'où : $\vec{AB}\begin{pmatrix} -9 \\ 9 \end{pmatrix}$ est un autre vecteur directeur de la droite (AB)

or, deux vecteurs directeurs de la même droite sont colinéaires

D'où : $\vec{AM}$ et $\vec{AB}$ sont colinéaires.

c'est-à-dire : $\det(\vec{AM};\vec{AB})=0 \iff \begin{vmatrix} x-6 & -9 \\ y+4 & 9 \end{vmatrix} = 0$

$\iff 9(x-6)-(y+4)\times(-9)=0$

$\iff 9x+9y-54+36=0$

$\iff 9x+9y-18=0$

$\iff \underline{x+y-2=0}$

c'est une équation cartésienne de la droite (AB).

2) $(d_1) : 3x-4y+1=0$ $\begin{cases} a=3 \\ b=-4 \\ c=1 \end{cases}$

on a $\vec{n}\begin{pmatrix} a=3 \\ b=-4 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (d_1)

comme $(d_2) \perp (d_1)$, $\vec{n}$ est un vecteur directeur de (d_2)

d'où : $\begin{cases} -b=3 \\ a=-4 \end{cases} \iff \begin{cases} a=-4 \\ b=-3 \end{cases}$

Alors, une équation cartésienne de (d_2) est :

$-4x-3y+c=0$

Or, $A(-2;7) \in (d_2)$

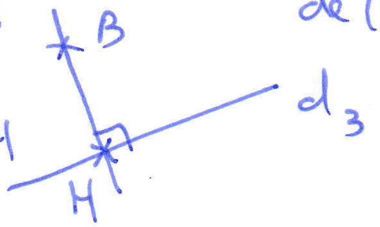
d'où : $-4x_A - 3y_A + c = 0$

$\iff -4\times(-2) - 3\times 7 + c = 0$

$\iff c = -8 + 21 = 13$

Donc : $\underline{-4x - 3y + 13 = 0}$ est une équation cartésienne de (d_2)

3) $(d_3) : -5x + 2y = 0$ $\begin{cases} a = -5 \\ b = 2 \\ c = 0 \end{cases}$



$B(-1;4)$

Soient $(x_H ; y_H)$ les coordonnées de H

$\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} x_H - x_B \\ y_H - y_B \end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} x_H + 1 \\ y_H - 4 \end{pmatrix}$

Soit $\vec{u}\begin{pmatrix} -b = -2 \\ a = -5 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d_3)

Comme $(BH) \perp (d_3)$, $\overrightarrow{BH} \perp \vec{u} \iff \overrightarrow{BH}\cdot\vec{u} = 0$

$\iff -2(x_H + 1) - 5(y_H - 4) = 0$

$\iff \underline{-2x_H - 5y_H = -18}$ (1)

D'autre part :

$H \in (d_3) \iff \underline{-5x_H + 2y_H = 0}$ (2)

D'où le système suivant :

$\begin{cases} -2x_H - 5y_H = -18 & (\times 5) \\ -5x_H + 2y_H = 0 & (\times(-2)) \end{cases}$

$\iff \begin{cases} -10x_H - 25y_H = -90 \\ 10x_H - 4y_H = 0 \end{cases}$ $L_2 \leftarrow L_1 + L_2$

$\iff \begin{cases} 10x_H = -25y_H + 90 = -25\times\frac{90}{29} + 90 = \frac{360}{29} \\ -29y_H = -90 \iff y_H = \frac{90}{29} \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x_H = \frac{36}{29} \\ y_H = \frac{90}{29} \end{cases}$, donc $\underline{H \text{ a pour coordonnées } \left(\frac{36}{29} ; \frac{90}{29}\right)}$

Exercice 2 : $\overrightarrow{BM} = 3\overrightarrow{BC}$ $\overrightarrow{DN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BD}$

1) Comme ABCD est un tétraèdre non aplati, les points A, B et C ne sont pas alignés, c'est-à-dire $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ non colinéaires.

2) $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$ (relation de Chasles)

$= \overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AB} + 3(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$ (relation de Chasles)

d'où : $\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}$

3) $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DN}$ (relation de Chasles)

$= \overrightarrow{AD} + \frac{3}{2}\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BD}$

$= \overrightarrow{AD} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - (\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD})$ (relation de Chasles)

$= \cancel{\overrightarrow{AD}} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} - \cancel{\overrightarrow{AD}}$

d'où $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

4) $-2\overrightarrow{AN} = -2(\overrightarrow{AB} - \frac{3}{2}\overrightarrow{AC})$

$= -2\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AM}$

D'où : $\overrightarrow{AM} = -2\overrightarrow{AN}$, c'est-à-dire : $\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AN}$ sont colinéaires avec un point en commun

Donc : Les points A, M et N sont alignés

Exercice 3 : Dans $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

1) $A(0;0;0)$, $B(1;0;0)$, $C(1;1;0)$, $D(0;1;0)$

$E(0;0;1)$, $F(1;0;1)$, $G(1;1;1)$ et $H(0;1;1)$

2) Comme le repère est orthonormé

$DF = \sqrt{(x_F - x_D)^2 + (y_F - y_D)^2 + (z_F - z_D)^2}$

$$DF=\sqrt{(1-0)^2+(0-1)^2+(1-0)^2}$$

$$=\sqrt{1+1+1}$$

Donc : $\underline{DF=\sqrt{3}}$

Exercice 4 : $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\0\\-1\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}$ $\vec{w}\begin{pmatrix}-3\\36\\14\end{pmatrix}$

On a $y_{\vec{u}}=0$ et $y_{\vec{v}}=4\neq 0$, d'où il n'existe pas de réel $k\neq 0$ tel que $\vec{v}=k\vec{u}$, autrement dit : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires

On suppose qu'il existe d_1, d_2, deux réels tels que :

$$\vec{w}=d_1\vec{u}+d_2\vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}-3\\36\\14\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3d_1-d_2\\4d_2\\-d_1+2d_2\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}3d_1-d_2=-3\\ d_2=\frac{36}{4}=9\\ -d_1+2d_2=14\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}d_1=\frac{-3+d_2}{3}=\frac{-3+9}{3}=2\\ d_2=9\\ -2+2\times 9=-2+18\\ \quad =16\neq 14\end{cases}$$

système non cohérent

D'où $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ ne sont pas coplanaires

Ils constituent donc une base de l'espace.