

BAC BLANC

Lycée Saint Jean XXIII

MATHEMATIQUES

Enseignement de spécialité

Sujet 1

Lundi 13 Janvier 2025

Durée de l'épreuve : 4 heures

Ce sujet comporte 4 pages numérotées de 1 à 4

ATTENTION : Il est impératif de rendre l'énoncé avec votre copie ainsi que **tous les brouillons utilisés.**

Calculatrice autorisée en **MODE EXAMEN**

*Les élèves doivent **traiter les cinq exercices.***

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 : Probabilités (5 points)

Selon les autorités sanitaires d'un pays, 7% des habitants sont affectés par une certaine maladie.

Dans ce pays, un test est mis au point pour détecter cette maladie. Ce test a les caractéristiques suivantes :

- Pour les individus malades, le test donne un résultat négatif dans 20% des cas
- Pour les individus sains, le test donne un résultat positif dans 1% des cas.

Une personne est choisie au hasard dans la population et testée.

On considère les événements suivants :

- M : « La personne est malade »
- T : « Le test est positif »

- 1) Calculer la probabilité de l'événement $M \cap T$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
- 2) Démontrer que la probabilité que le test de la personne choisie au hasard soit positif est de 0,0653.
- 3) Dans un contexte de dépistage de la maladie, est-il plus pertinent de connaître $p_M(T)$ ou $p_T(M)$?
- 4) On considère que la personne choisie au hasard a eu un test positif. Quelle est alors la probabilité qu'elle soit malade ? On arrondira le résultat à 10^{-2} près.
- 5) On choisit dix personnes au hasard dans la population. La taille de la population de ce pays permet d'assimiler ce prélèvement à un tirage avec remise.

On note X : la variable aléatoire qui donne le nombre d'individus ayant un test positif parmi les 10 personnes.

- a) Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X
- b) Déterminer la probabilité pour qu'exactement deux personnes aient un test positif. On arrondira le résultat à 10^{-2} près.
- 6) Déterminer le nombre minimum de personnes à tester dans ce pays pour que la probabilité qu'au moins l'une d'entre elles ait un test positif soit supérieure à 99%.

Exercice 2 : Géométrie dans l'espace (5 points)

Dans l'espace muni d'un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ d'unité 1 cm, on considère les points suivants :

$$J(2 ; 0 ; 1) , K(1 ; 2 ; 1) \text{ et } L(-2 ; -2 ; -2)$$

- 1) a) Montrer que le triangle JKL est rectangle en J
- b) Calculer la valeur exacte de l'aire du triangle JKL en cm^2
- c) Déterminer une valeur approchée, au dixième près, de l'angle géométrique $\widehat{JKL}$
- 2) a) Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -10 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (JKL)
- b) En déduire une équation cartésienne du plan (JKL)

Dans la suite, T désigne le point de coordonnées $(10 ; 9 ; -6)$

- 3) a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (Δ) orthogonale au plan (JKL) et passant par T

b) Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point T sur le plan (JKL)

c) On rappelle que le volume d'un tétraèdre est donné par la formule :

$$V = \frac{1}{3} \times \text{Aire(Base)} \times \text{hauteur (correspondante)}$$

Calculer la valeur exacte du volume du tétraèdre JKLT en cm^3

Exercice 3 : (5 points)

On s'intéresse à une population de tortues vivant sur une île.

Partie A

Au début de l'année 2000, on comptait 300 tortues. Une étude a permis de modéliser ce nombre de tortues par la suite (u_n) définie par :

$$\begin{cases} u_0 = 0,3 \\ u_{n+1} = 0,9u_n(1 - u_n) \end{cases}$$

Où pour tout entier naturel n , u_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année 2000 + n .

1) Déterminer le nombre de tortues au début de l'année 2001 puis de l'année 2002.

2) On admet que, pour tout entier naturel n , $u_n \in [0,1]$ et que $1 - u_n \in [0,1]$.

a) Exprimer $u_{n+1} - 0,9u_n$ en fonction de u_n .

b) En déduire que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_{n+1} \leq 0,9u_n$.

c) **On admet que, pour tout entier naturel n , $0 \leq u_n \leq 0,3 \times 0,9^n$**

En déduire la limite de la suite (u_n) . Que peut-on en conclure sur l'avenir de cette population de tortues ?

3) Des études permettent d'affirmer, si le nombre de tortues à une date donnée est inférieur au seuil critique de 30 individus, alors l'espèce est menacée d'extinction.

Compléter le programme en Python ci-contre afin qu'il détermine la dernière année avant laquelle il reste au moins 30 tortues.

```
u=0.3
n=0
while ..... ;
    .....
    .....
print (.....)
```

Partie B

Au début de l'année 2010, il ne reste que 32 tortues.

Afin d'assurer la pérennité de l'espèce, des actions sont menées pour améliorer la fécondité des tortues. L'évolution de la population est alors modifiée et le nombre de tortues peut être modélisé par la suite (V_n) définie par :

$$\begin{cases} V_{10} = 0,032 \\ V_{n+1} = 1,06V_n(1 - V_n) \end{cases}$$

Où pour tout entier naturel $n > 10$, V_n modélise le nombre de tortues, en milliers, au début de l'année 2000 + n .

- 1) Calculer le nombre de tortues au début 2011.
- 2) On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 1,06x(1 - x)$
Etudier le sens de variation de la fonction g .
- 3) Démontrer par récurrence que, pour tout entier $n \geq 10$, $0,032 \leq V_n \leq V_{n+1} \leq 0,5$
- 4) En déduire que la suite (V_n) converge vers une limite ℓ .
- 5) On admet que ℓ vérifie $\ell = 1,06 \ell(1 - \ell)$
Déterminer ℓ .
- 6) La population de tortues est-elle encore en voie d'extinction ?

Exercice 4 : (3,5 points)

On considère la fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$ par $f(x) = \frac{e^x}{x-2}$

- 1) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $f'(x) = \frac{e^x(x-3)}{(x-2)^2}$
- 2) On dispose de ce tableau de variations de la fonction f sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$.

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
<i>Signe de $f'(x)$</i>	-		- 0 +	
<i>Variations de f</i>	0 $\searrow$ $-\infty$		$+\infty \searrow e^3 \nearrow +\infty$	

Justifier les informations lues dans le tableau de variation

- a) La valeur e^3
 - b) Les variations de f
 - c) Les limites de f aux bornes de son domaine de définition. Cf admet-elle des asymptotes ? Justifier.
- 3) Etudier la position relative de la courbe C_f et son asymptote horizontale

Exercice 5 : (1,5 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. Chaque réponse doit être justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point.

Affirmation 1 : On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{3x^2+4x+7}{6x^2+1}$ et on note C_f sa représentation graphique.

La courbe C_f admet une asymptote horizontale d'équation $y = \frac{1}{2}$ en $-\infty$

Affirmation 2 : On considère les suites (a_n) et (b_n) définies pour tout entier naturel n par :
 $a_{n+1} = 0,5a_n + 1$ et $a_0 = 1$ et $b_n = a_n - 2$
 La suite (b_n) est géométrique.

Affirmation 3 : On considère la suite (U_n) définie pour tout entier n par $U_{n+1} = \frac{9}{6 - U_n}$ et $U_0 = -3$

De plus , la suite (U_n) est majorée par 6.

La suite (U_n) est décroissante