

BAC BLANC

Lycée Saint Jean XXIII

MATHEMATIQUES

Enseignement de spécialité

Sujet 2

16 Janvier 2024

Durée de l'épreuve : 4 heures

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6

ATTENTION : Il est impératif de rendre l'énoncé avec votre copie ainsi que **tous** les brouillons utilisés.

Calculatrice autorisée en **MODE EXAMEN**

*Les élèves doivent **traiter les cinq exercices.***

Vous préciserez le nom de votre professeur sur chaque copie :

- Pour les exercices 1, 2 et 3 inscrire le nom de Mme SONNET-ROGISSART ou de Mme VIGOUR.
- Pour les exercices 4 et 5, inscrire le nom de M. MANGEARD ou de M. NASSER.

Exercice 1 : (Sur 2,5 points)

Pour chacune des affirmations suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse. On justifiera chaque réponse.

Affirmation 1 :

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}/\{2\}$ par $f(x) = \frac{x-5}{(x-2)^2}$.

La limite de la fonction f en 2 est égale à $+\infty$

Affirmation 2 :

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = +\infty$ Alors $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$

Affirmation 3 :

On considère deux suites (a_n) et (b_n) définies pour tout entier naturel n par :

$$a_{n+1} = 0,5a_n + 1 \text{ et } a_0 = 1$$

$$b_n = a_n - 2.$$

La suite (b_n) est géométrique

Exercice 2 : (Sur 7 points)

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \frac{x-2}{e^x} - 1$ et C_f sa courbe représentative dans un repère.

- 1) Montrer que $f(x) = \frac{-e^x + x - 2}{e^x}$
- 2) a) Déterminer la limite de f en $+\infty$
b) Déterminer la limite de f en $-\infty$
c) C_f admet-elle une asymptote verticale ? une asymptote horizontale ? Justifier.
- 3) Etudier la position relative de C_f avec asymptote $y = -1$
- 4) a) Calculer de $f'(x)$ et vérifier que pour tout réel x , $f'(x) = \frac{3-x}{e^x}$.
b) Etudier les variations f et dresser son tableau de variation complet
- 5) On pose $g(x) = x - 2 - e^x$
 - a) Calculer $g'(x)$
 - b) Etudier les variations g et calculer $g(0)$
 - c) En déduire le signe de $g(x)$.
 - d) En déduire le signe de $f(x)$ pour tout réel x .

Exercice 3 : (Sur 5,5 points)

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel n , par $u_{n+1} = \frac{-u_n - 4}{3 + u_n}$

On admet que u_n existe bien pour tout entier naturel n

- 1) Calculer u_1 et u_2 . On fera apparaître le détail des calculs
- 2) On considère la fonction Python « terme » ci-dessous, écrite de manière incomplète :

```
Def  terme(n) :  
    u= .....  
    for i in range(n) :  
        u=  
        .....  
    return u
```

On rappelle qu'en langage Python, « i in range(n) » signifie que i varie de 0 à $n - 1$

Recopier et compléter la cadre ci-dessus de sorte que, pour tout entier naturel n , l'instruction « terme(n) » renvoie la valeur de u_n

- 3) Soit f la fonction définie sur l'intervalle $] - 3; +\infty[$ par $f(x) = \frac{-x-4}{3+x}$

Ainsi, pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} = f(u_n)$

- a) Démontrer que la fonction f est strictement croissante sur l'intervalle $] - 3; +\infty[$
 - b) Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n , on a $-2 < u_{n+1} \leq u_n$
 - c) En déduire que la suite (u_n) est convergente.
- 4) On définit la suite (v_n) pour tout entier naturel n par : $v_n = \frac{1}{u_n + 2}$
 - a) Calculer v_0
 - b) Démontrer que la suite (v_n) est arithmétique de raison 1
 - c) En déduire que $u_n = \frac{-4n}{2n+1}$
 - d) Déterminer, en justifiant, la limite de (u_n)

Exercice 4 : (Sur 5 points)

Au basket-ball, il existe deux sortes de tir :

- Les tirs à deux points.
Ils sont réalisés près du panier et rapportent deux points s'ils sont réussis.
- Les tirs à trois points.
Ils sont réalisés loin du panier et rapportent trois points s'ils sont réussis.

Stéphanie s'entraîne au tir. On dispose des données suivantes :

- Un quart de ses tirs sont des tirs à deux points. Parmi eux, 60% sont réussis.
- Trois quarts de ses tirs sont des tirs à trois points. Parmi eux, 35% sont réussis.

1) Stéphanie réalise un tir.

On considère les événements suivants :

D : « Il s'agit d'un tir à deux points ».

R : « le tir est réussi ».

- a) Représenter la situation à l'aide d'un arbre de probabilités.
- b) Calculer la probabilité $p(\overline{D} \cap R)$.
- c) Démontrer que la probabilité que Stéphanie réussisse un tir est égale à 0,4125.
- d) Stéphanie réussit un tir. Calculer la probabilité qu'il s'agisse d'un tir à trois points.
Arrondir le résultat au centième.

2) Stéphanie réalise à présent une série de 10 tirs à trois points.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de tirs réussis.

On considère que les tirs sont indépendants. On rappelle que la probabilité que Stéphanie réussisse un tir à trois points est égale à 0,35.

- a) Justifier que X suit une loi binomiale. Préciser ses paramètres.
- b) Calculer l'espérance de X. Interpréter le résultat dans le contexte de l'exercice.
- c) Déterminer la probabilité que Stéphanie rate 4 tirs ou plus. Arrondir le résultat au centième.
- d) Déterminer la probabilité que Stéphanie rate au plus 4 tirs. Arrondir le résultat au centième.

3) Soit n un entier naturel non nul.

Stéphanie souhaite réaliser une série de n tirs à trois points.

On considère que les tirs sont indépendants. On rappelle que la probabilité qu'elle réussisse un tir à trois points est égale à 0,35.

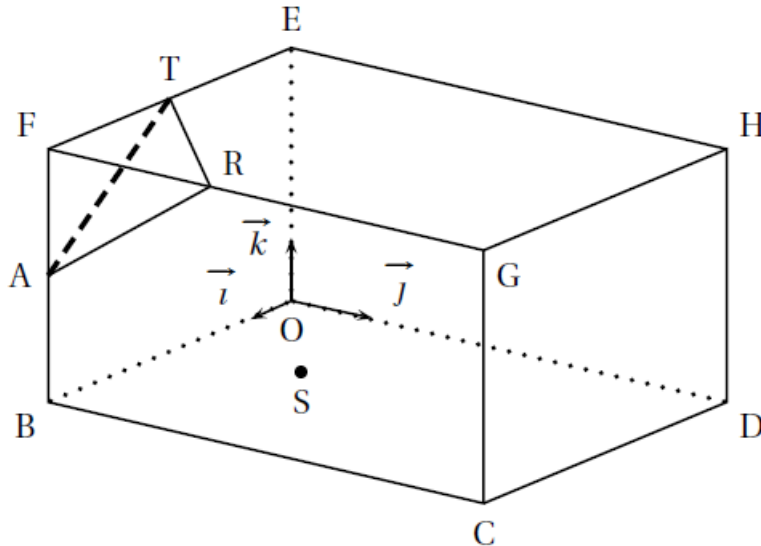
A l'aide de la calculatrice déterminer la valeur minimale de n pour que la probabilité que Stéphanie réussisse au moins un tir parmi les n tirs soit supérieure ou égale à 0,99.

Exercice 5 : (Sur 5 points)

Une exposition d'art contemporain a lieu dans une salle en forme de pavé droit de largeur 6 m, de longueur 8m et de hauteur 4m.

Elle est représentée par le parallélépipède rectangle OBCDEFGH où $OB = 6$ m, $OD = 8$ m et $OE = 4$ m.

On utilise le repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ tel que : $\vec{i} = \frac{1}{6} \overrightarrow{OB}$, $\vec{j} = \frac{1}{8} \overrightarrow{OD}$, $\vec{k} = \frac{1}{4} \overrightarrow{OE}$



Dans ce repère on a, en particulier $C(6; 8; 0)$, $F(6; 0; 4)$ et $G(6; 8; 4)$.

Une des œuvres exposées est un triangle de verre représenté par le triangle ART qui a pour sommets

$A(6; 0; 2)$, $R(6; 3; 4)$ et $T(3; 0; 4)$, Enfin, S est le point de coordonnées $(3; \frac{5}{2}; 0)$.

- 1) a) Vérifier que le triangle ART est isocèle en A.
b) Calculer le produit scalaire $\overrightarrow{AR} \cdot \overrightarrow{AT}$.
c) En déduire une valeur approchée à 0,1 degré près de l'angle $\widehat{RAT}$.
- 2) a) Justifier que le vecteur $\vec{n}(2; -2; 3)$ est un vecteur normal au plan (ART).
b) En déduire une équation cartésienne du plan (ART).
- 3) Un rayon laser dirigé vers le triangle ART est émis du plancher à partir du point S. On admet que ce rayon est orthogonal au plan (ART).
a) Soit Δ la droite orthogonale au plan (ART) et passant par le point S.

Justifier que le système ci-dessous est une représentation paramétrique de la droite Δ :

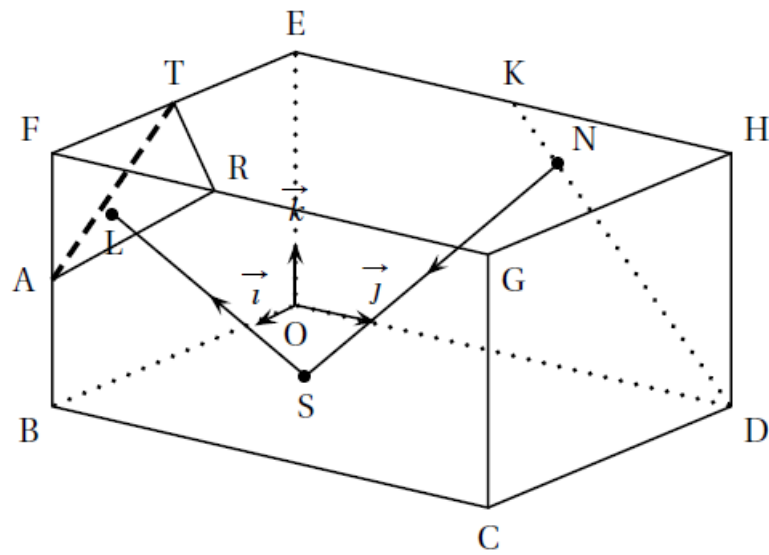
$$\begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = \frac{5}{2} - 2k \\ z = 3k \end{cases} \text{ avec } k \in \mathbb{R}$$

- b) Soit L le point d'intersection de la droite Δ , avec le plan (ART).

Démontrer que L a pour coordonnées $(5; \frac{1}{2}; 3)$.

Questions bonus

- 4) L'artiste installe un rail représenté par le segment $[DK]$ où K est le milieu du segment $[EH]$. Sur ce rail, il positionne une source lumineuse laser en un point N du segment $[DK]$ et il oriente ce second rayon laser vers le point S .



- Montrer que, pour tout réel t de l'intervalle $[0; 1]$, le point N de coordonnées $(0; 8-4t; 4t)$ est un point du segment $[DK]$.
- Calculer les coordonnées exactes du point N tel que les deux rayons laser représentés par les segments $[SL]$ et $[SN]$ soient perpendiculaires.