Spécialité Maths Terminale (M Mangeard)	**Corrigé de l'évaluation de mathématiques :** *Rappels de Première + Vecteurs de l'espace : relation de Chasles, colinéarité, coplanarité, bases de l'espace*	Fait le mardi 03 octobre 2023

Exercice 1 :

On se place dans le plan, muni d'un repère orthogonal (O ;$\vec{\imath},\vec{\jmath}$)

On a A(-7 ;3), B(4 ;-2) et C(5 ;1)

1) Déterminer une équation cartésienne de la droite (AB) en détaillant.

Coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4-(-7)\\-2-3\end{pmatrix}$, c'est-à-dire : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}11\\-5\end{pmatrix}$

Soit M(x ;y) ∈ (AB), coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+7\\y-3\end{pmatrix}$ est aussi un vecteur directeur de la droite (AB)

Or, deux vecteurs directeurs de la même droite sont colinéaires, d'où :

$\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires ⇔ det($\overrightarrow{AM}$; $\overrightarrow{AB}$) = 0

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}x+7 & 11\\ y-3 & -5\end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -5(x+7) - 11(y-3) = 0$$

$$\Leftrightarrow -5x - 11y - 35 + 33 = 0$$

⇔ <u>**$-5x - 11y - 2 = 0$ est une équation cartésienne de la droite (AB)**</u>

2) Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) telle que (d) // (AB) et le point C est situé sur (d)

Comme (d) // (AB), le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est aussi un vecteur directeur de la droite (d)

Soit M(x ;y) ∈ (d), alors : $\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix}x-5\\y-1\end{pmatrix}$ est aussi un vecteur directeur de (d)

D'où : $\overrightarrow{CM}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires ⇔ det($\overrightarrow{CM}$; $\overrightarrow{AB}$) = 0

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix}x-5 & 11\\ y-1 & -5\end{vmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow -5(x-5) - 11(y-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow -5x - 11y + 25 + 11 = 0$$

⇔ <u>**$-5x - 11y + 36 = 0$**</u> est une équation cartésienne de la droite (d)

Exercice 2 : Résoudre le système suivant par la méthode de votre choix :

$$\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ -x - 5y = -\frac{17}{6} \end{cases}$$

Par substitution : $\begin{cases} 3x + 2y = 2 \\ -5y + \frac{17}{6} = x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3(-5y + \frac{17}{6}) + 2y = 2 \\ -5y + \frac{17}{6} = x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -13y + \frac{17}{2} = 2 \\ -5y + \frac{17}{6} = x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -13y = -\frac{13}{2} \\ -5y + \frac{17}{6} = x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ -5 \times \frac{1}{2} + \frac{17}{6} = x \end{cases}$$

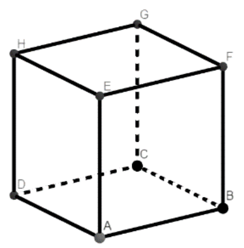
$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ -\frac{15}{6} + \frac{17}{6} = x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} = x \end{cases}$$

Donc $\mathbf{S = \{(\frac{1}{3} ; \frac{1}{2})\}}$

Exercice 3 : On se place dans l'espace

On considère le cube ABCDEFGH suivant :



On définit les points suivants :

I est le milieu du segment [GD] et J est tel que : $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DF}$

1) Pourquoi peut-on affirmer que $(\overrightarrow{DH}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$ est une base de l'espace ? Justifier

Les vecteurs $\overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{DA}$ ne sont pas colinéaires (c'est évident, car D, C et A ne sont pas alignés)

On a : $\overrightarrow{DH}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}$ ne sont pas coplanaires. Donc : $(\overrightarrow{DH}, \overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA})$ est une base de l'espace.

2) Montrer que $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DH} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{DA}$

Comme $\overrightarrow{DJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DF}$, on a : $\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AF})$ (relation de Chasles)

$$\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA} - \overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AF}$$

$$= -\frac{2}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DG} \text{ (car } \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{DG})$$

$$= -\frac{2}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{1}{3}(\overrightarrow{DC} + \overrightarrow{DH})$$

Donc : $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DH} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{DA}$

3) Montrer que $\overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

$$\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DI} \text{ (relation de Chasles)}$$

$$= \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{DH} + \overrightarrow{DC})$$

Donc : $\overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC}$

4) Montrer que les points A, I et J sont alignés.

On a : $\overrightarrow{AJ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DH} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{DA}$

Et $\overrightarrow{AI} = -\overrightarrow{DA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA}$

D'où : $\frac{3}{2}\overrightarrow{AJ} = \frac{3}{2}(\frac{1}{3}\overrightarrow{DH} + \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} - \frac{2}{3}\overrightarrow{DA}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{DH} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} - \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AI}$

Donc : Les vecteurs $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AJ}$ sont colinéaires avec un point en commun,

Par conséquent : **Les points A, I et J sont alignés**