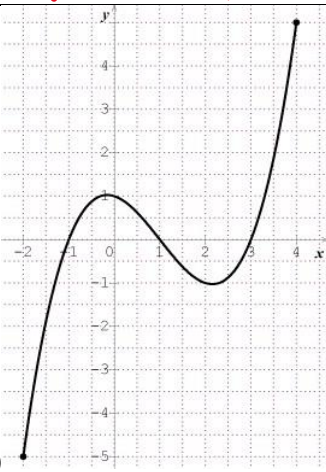


Spé Maths Terminale (M Mangeard)	<u>Corrigé du contrôle de mathématiques :</u> <i>Dérivation / Convexité / Points d'inflexion</i>	Fait le mardi 13 février 2024
--	--	----------------------------------

Cocher la ou les bonnes réponses à chaque fois (sans justification)

Questions	Réponses											
1) Soit $f(x) = x^3 - 3x + 1$ sur $\mathbb{R}$ $f'(x) = 3x^2 - 3$ $f''(x) = 6x$	☐ f est concave sur $\mathbb{R}$ ☐ f est convexe sur $\mathbb{R}$ ☒ f est concave sur $]-\infty; 0]$ et convexe sur $[0; +\infty[$ ☐ f est convexe sur $]-\infty; 0]$ et concave sur $[0; +\infty[$											
2) <table><tr><td>x</td><td>-2</td><td>3</td><td>4</td><td>7</td></tr><tr><td>Signe de $g''(x)$</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td></tr></table> g'' s'annule et change de signe deux fois sur $[-2; 5]$	x	-2	3	4	7	Signe de $g''(x)$	-	0	+	0	-	☐ La courbe de g ne présente aucun point d'inflexion ☐ La courbe de g présente un unique point d'inflexion sur $[-2; 7]$ ☐ La courbe de g présente deux points d'inflexion sur $[3; 7]$ ☒ La courbe de g présente deux points d'inflexion sur $[-2; 5]$
x	-2	3	4	7								
Signe de $g''(x)$	-	0	+	0	-							
3)  Courbe de f'	☐ f est croissante sur $[-2; 0] \cup [2, 2; 4]$ ☒ f est croissante sur $[-1; 1]$ <i>sur $[-1; 1]$, $f' > 0$ d'où f croissante</i> ☒ f'' est positive sur $[-2; -1]$ <i>sur $[-2; -1]$, f' croissante</i> ☐ La courbe de f présente un point d'inflexion d'abscisse 1 ☐ f est convexe sur $[2; +\infty[$ ☒ f présente un extremum local en $x = -1$ <i>f' s'annule et change de signe en $x = -1$</i> ☐ f présente un maximum local au voisinage de $x = 0$ ☒ La courbe de f présente deux points d'inflexion sur $[-2; 4]$ <i>f' change de variations deux fois sur $[-2; 4]$ (juste avant 0 et après 2)</i>											
3) $f(x) = \text{Dérivée}\left(\frac{e^x}{\sqrt{x}}, x, 2\right)$ $\rightarrow \frac{3x e^x - 4x^2 e^x + 4x^3 e^x}{4x^2 \sqrt{x}}$ $g(x) = \text{Simplifier}(f)$ $\rightarrow \underbrace{(4x^2 - 4x + 3)}_{\Delta < 0} \sqrt{x} \cdot \frac{e^x}{4x^3}$ <i>$e^x > 0$, pour tout x $4x^3 > 0$, pour tout $x \in]0; +\infty[$ $\sqrt{x} > 0$, pour tout $x \in]0; +\infty[$</i>	☒ f est convexe sur $]0; +\infty[$ ☐ f est concave sur $]0; +\infty[$ ☐ La courbe de f présente un seul point d'inflexion sur $]0; +\infty[$ ☐ La courbe de f présente deux points d'inflexion sur $]0; +\infty[$ ☒ La courbe de f ne présente aucun point d'inflexion sur $]0; +\infty[$ <i>$f''(x) \neq 0$, pour tout $x \in]0; +\infty[$</i>											

4) On considère les fonctions u et v définies sur $\mathbb{R}$ respectivement par : $u(x) = 2x^2 + 1$ et $v(x) = e^x$ La fonction uov est définie par :	☒ $uov(x) = 2e^{2x} + 1$ ☐ $uov(x) = (2x^2 + 1)e^x$ ☐ $uov(x) = e^{2x^2+1}$ <i>Handwritten:</i> $uov(x) = u(v(x)) = 2(e^x)^2 + 1 = 2e^{2x} + 1$
5) Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (5x + 2)^{11}$ L'expression de f' est donnée par :	☐ $f'(x) = 11(5x + 2)^{10}$ ☒ $f'(x) = 55(5x + 2)^{10}$ ☐ $f'(x) = 5(5x + 2)^{10}$ <i>Handwritten:</i> $(u^n)' = n u' u^{n-1}$ $u(x) = 5x + 2$ $u'(x) = 5$
6) Soit la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par : $g(x) = e^{5x^2 - 4x + 1}$ L'expression de g' est donnée par :	☒ $g'(x) = (10x - 4)e^{5x^2 - 4x + 1}$ ☐ $g'(x) = e^{10x - 4}$ ☐ $g'(x) = e^{5x^2 - 4x + 1}$ <i>Handwritten:</i> $(e^u)' = u' e^u$ $u(x) = 5x^2 - 4x + 1$ $u'(x) = 10x - 4$
7) Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \sqrt{e^{2x}}$ L'expression de h' est donnée par :	☐ $h'(x) = \frac{1}{2\sqrt{e^{2x}}}$ ☒ $h'(x) = \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}}}$ ☐ $h'(x) = \frac{2e^{2x}}{\sqrt{e^{2x}}}$ <i>Handwritten:</i> $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$ $u(x) = e^{2x}$ $u'(x) = 2e^{2x}$

Exercice : (Avec justifications)

Soit $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 4$ définie sur $\mathbb{R}$.

1) Montrer que $f''(x) = 12x - 10$

Handwritten: f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est une fonction polynôme

Handwritten: $f'(x) = 6x^2 - 10x$

Handwritten: d'où : $f''(x) = 6 \times 2x - 10 = 12x - 10$

2) En déduire que la courbe de f admet un unique point d'inflexion sur $\mathbb{R}$

Handwritten: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow 12x - 10 = 0$
 $\Leftrightarrow x = \frac{10}{12} = \frac{5}{6}$

Handwritten: D'autre part : $f''(x) > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{6}$

Handwritten: et $f''(x) \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{5}{6}$

Handwritten: d'où : f'' s'annule et change de signe une seule fois en $x = \frac{5}{6}$
Donc : (Γ_f) admet un unique point d'inflexion d'abscisse $\frac{5}{6}$

3) Calculer les coordonnées de ce point

Si on note A ce point - $A\left(\frac{5}{6}; f\left(\frac{5}{6}\right)\right)$

$$\text{or, } f\left(\frac{5}{6}\right) = 2 \times \left(\frac{5}{6}\right)^3 - 5 \left(\frac{5}{6}\right)^2 + 4 = \frac{91}{54}$$

Donc l'unique point d'inflexion de (f) a pour coordonnées :

$$\left(\frac{5}{6}; \frac{91}{54}\right)$$