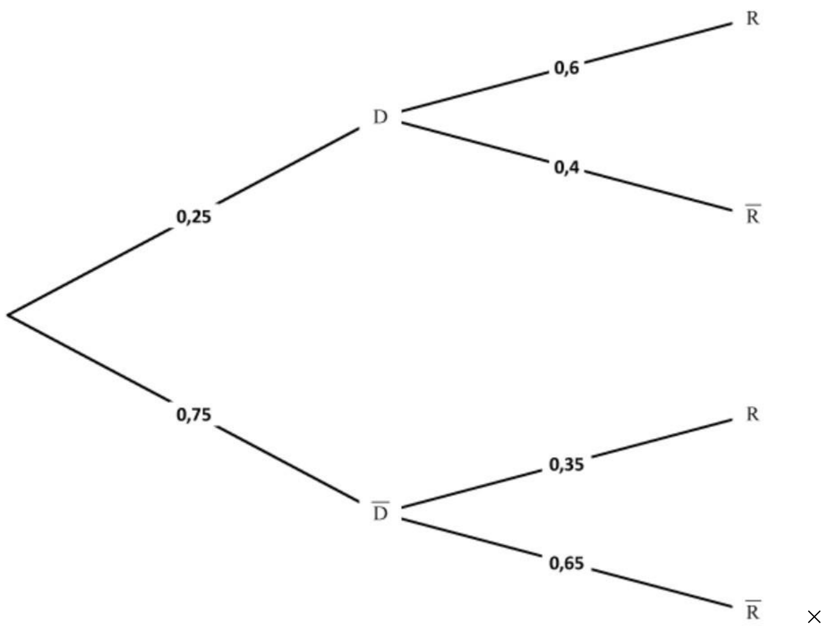
Spé Maths Terminale	**Corrigé des exercices de probabilité et de géométrie dans l'espace (Bac blanc n°1) Sujet 2**	Lundi 15 janvier 2024

Exercice 1 : (5 pts)

1)a)



b) $p(\overline{D} \cap R) = p(\overline{D}) \times p_{\overline{D}}(R) = 0,75 \times 0,35 =$ **0,2625**

c) On a $p(R) = p(D \cap R) + p(\overline{D} \cap R)$

$= p(D) \times p_D(R) + 0,2625$

$= 0,25 \times 0,6 + 0,2625 =$ **0,4125**

d) Il faut calculer : $p_R(\overline{D}) = \frac{p(R \cap \overline{D})}{p(R)} = \frac{0,2625}{0,4125} \simeq$ **0,64**

2)a) On répète 10 fois de manière indépendante la même épreuve de Bernoulli (- Succès : le tir à 3points est réussi – Echec : le tir à 3 points est raté) de paramètre $p = 0,35$.

X est la variable aléatoire qui compte les succès. Alors X suit la loi binomiale de paramètres :

$n = 10$ et $p = 0,35$

Donc : La variable X suit la loi binomiale de paramètres (10 ;0,35)

b) Comme X suit la loi binomiale de paramètres (10 ;0,35), **E(X) =** $n \times p = 10 \times 0,35 =$ **3,5**

En moyenne, elle réussira environ 7 tirs sur 20

c) On a **$P(X \leq 6) \simeq 0,97$** (à la calculatrice)

d) On a $P(X \geq 6) = 1 - P(X < 6)$

Donc **$P(X \geq 6)$** $= 1 - P(X \leq 5) \simeq$ **0,09** (à la calculatrice)

3) n n'est plus fixé à 10

$P(X \geq 1) \geq 0{,}99 \Leftrightarrow 1 - P(X < 1) \geq 0{,}99$

$\Leftrightarrow 1 - P(X = 0) \geq 0{,}99$

$\Leftrightarrow P(X = 0) \leq 1 - 0{,}99 = 0{,}01$

$\Leftrightarrow \binom{n}{0} \times 0{,}35^0 \times (1 - 0{,}35)^n \leq 0{,}01$

$\Leftrightarrow 0{,}65^n \leq 0{,}01$

A l'aide de la calculatrice, on obtient : $0{,}65^{10} \simeq 0{,}013 > 0{,}01$ et $0{,}65^{11} \simeq 0{,}0088 < 0{,}01$

Donc : **n = 11 est le plus petit entier naturel pour lequel $P(X \geq 1) \geq 0{,}99$: Stéphanie doit donc réaliser au moins onze tirs.**

Exercice 5 : (5 points)

1)a) On a : $AR = \sqrt{(x_R - x_A)^2 + (y_R - y_A)^2 + (z_R - z_A)^2}$

$= \sqrt{(6 - 6)^2 + (3 - 0)^2 + (4 - 2)^2}$

$= \sqrt{13}$

Et $AT = \sqrt{(x_T - x_A)^2 + (y_T - y_A)^2 + (z_T - z_A)^2}$

$= \sqrt{(3 - 6)^2 + (0 - 0)^2 + (4 - 2)^2}$

$= \sqrt{13}$

D'où : AT = AR, donc **le triangle ART est isocèle en A**

b) $\overrightarrow{AR}\begin{pmatrix} x_R - x_A \\ y_R - y_A \\ z_R - z_A \end{pmatrix}$, d'où : $\overrightarrow{AR}\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, et de même : $\overrightarrow{AT}\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$

Alors : $\overrightarrow{\mathbf{AR}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{AT}} = x_{\overrightarrow{AR}} \times x_{\overrightarrow{AT}} + y_{\overrightarrow{AR}} \times y_{\overrightarrow{AT}}$

$= 2 \times 2$ **= 4**

c) D'autre part, $\overrightarrow{\mathbf{AR}} \cdot \overrightarrow{\mathbf{AT}} = AR \times AT \times \cos(\widehat{RAT})$

$= 13 \times \cos(\widehat{RAT}) = 4$

D'où : $\cos(\widehat{RAT}) = \frac{4}{13}$, on a donc : $\widehat{\mathbf{RAT}} = \cos^{-1}\left(\frac{4}{13}\right)$ **≃ 72,1°**

2)a) $\overrightarrow{AR}$ et $\overrightarrow{AT}$ sont deux vecteurs non colinéaires (en effet, $x_{\overrightarrow{AR}} = 0$ mais $x_{\overrightarrow{AT}} \neq 0$)

Ce sont donc deux vecteurs directeurs du plan (ART)

Or, $\vec{n}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

On a : $\vec{n} \,.\, \overrightarrow{AR} = 2 \times 0 + (-2) \times 3 + 3 \times 2 = -6 + 6 = 0$, d'où : $\vec{n} \perp \overrightarrow{AR}$

De même,

$\vec{n} \,.\, \overrightarrow{AT} = 2 \times (-3) + (-2) \times 0 + 3 \times 2 = -6 + 6 = 0$, d'où : $\vec{n} \perp \overrightarrow{AT}$

$\vec{n}$ est donc orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (ART),

Donc : **$\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ART)**

b) Comme $\vec{n}$ a pour coordonnées : $\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, on peut prendre : $\begin{cases} a = 2 \\ b = -2 \\ c = 3 \end{cases}$

Une équation cartésienne du plan (ART) est donnée par :

$$2x - 2y + 3z + d = 0$$

Or, A(6 ;0 ;2) $\in$(ART), d'où : $2\times6 - 2\times0 + 3\times2 + d = 0$

C'est-à-dire : $d = -18$

Donc : **$2x - 2y + 3z - 18 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ART)**

3) a) ($\triangle$) est orthogonale au plan (ART), d'où $\vec{n}$ est un de ses vecteurs directeurs

Soit M(x ;y ;z) $\in$($\triangle$) :

$\overrightarrow{SM} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-\frac{5}{2} \\ z-0 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite ($\triangle$)

Or, deux vecteurs directeurs de la même droite sont colinéaires,

D'où : $\overrightarrow{SM}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires

$$\overrightarrow{SM} = k\vec{n},\ k \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} x - 3 = 2k \\ y - \frac{5}{2} = -2k\ , \qquad k \in \mathbb{R} \\ z = 3k \end{cases}$$

$$\boxed{\text{Donc : } \begin{cases} x = 3 + 2k \\ y = \frac{5}{2} - 2k\ , \qquad k \in \mathbb{R} \\ z = 3k \end{cases}}$$

Est une représentation paramétrique de la droite ($\triangle$)

b) On a $\{L\} = (\triangle) \cap (ART)$

D'où : $2\,(3 + 2k) - 2(\frac{5}{2} - 2k) + 3(3k) - 18 = 0$

$\Leftrightarrow 17k = 17$, d'où $k = 1$

$x = 3 + 2 \times 1 = 5$

$y = \frac{5}{2} - 2 \times 1 = \frac{1}{2}$

$z = 3 \times 1 = 3$ Donc : **<u>L a pour coordonnées</u> $(5\ ;\frac{1}{2}\ ;3)$**

4) a) Dans le repère : E(0 ;0 ;4), H(0 ;8 ;4), D(0 ;8 ;0)

Comme K est le milieu de [EH], $x_K = \frac{x_E + x_H}{2} = \frac{0+0}{2} = 0$

$$y_K = \frac{y_E + y_H}{2} = \frac{0+8}{2} = 4$$

$$z_K = \frac{z_E + z_H}{2} = \frac{4+4}{2} = 4,$$

Donc : K a pour coordonnées (0 ;4 ;4)

On a : $\overrightarrow{DK}\begin{pmatrix} 0 \\ -4 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{DN}\begin{pmatrix} 0 \\ -4t \\ 4t \end{pmatrix}$, on a alors : $\overrightarrow{DN} = t\overrightarrow{DK}$, d'où $\overrightarrow{DN}$ et $\overrightarrow{DK}$ sont colinéaires

D'autre part, $t \in [0\ ;1]$, donc : **<u>N ∈ [DK]</u>**

b) $\overrightarrow{SL}\begin{pmatrix} 5-3 \\ \frac{1}{2} - \frac{5}{2} \\ 3-0 \end{pmatrix}$, d'où : $\overrightarrow{SL}\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}$,

$\overrightarrow{SN}\begin{pmatrix} 0-3 \\ 8-4t-\frac{5}{2} \\ 4t-0 \end{pmatrix}$ d'où : $\overrightarrow{SN}\begin{pmatrix} -3 \\ \frac{11}{2} - 4t \\ 4t \end{pmatrix}$

On souhaite que $\overrightarrow{SL} \perp \overrightarrow{SN}$, d'où : $\overrightarrow{SL} \cdot \overrightarrow{SN} = 0$

$2\times(-3) - 2 \times(\frac{11}{2} - 4t) + 3\times 4t = 0$

$20t = 17$, d'où : $t = \frac{17}{20}$

Donc : $N(0\ ;8 - 4\times\frac{17}{20}\ ;4\times\frac{17}{20})$, c'est-à-dire : **<u>N $(0\ ;\frac{23}{5}\ ;\frac{17}{5})$</u>**