Spé Tle

Corrigé Bac 2024 Sujet 2

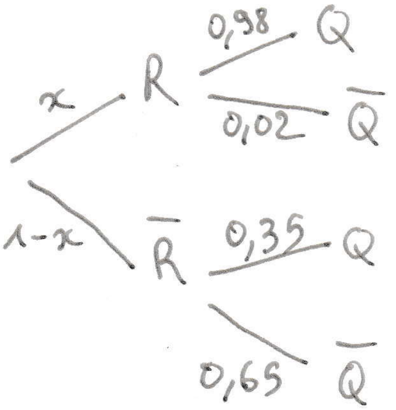
Exercice 1

D'après l'énoncé, on a $p(Q) = 0,917$

et $p_{\overline{R}}(\overline{Q})$: la probabilité que l'étudiant interrogé réponde "non" sachant qu'il a échoué

donc $p_{\overline{R}}(\overline{Q}) = 0,65$

2) a)



b) On a $p(Q) = p(R \cap Q) + p(\overline{R} \cap Q)$

$= p(R) \times p_R(Q) + p(\overline{R}) \times p_{\overline{R}}(Q)$ (Formule des probabilités totales)

$= x \times 0,98 + (1-x) \times 0,35$

$= x(0,98 - 0,35) + 0,35$

$= 0,63x + 0,35$

or, $p(Q) = 0,917$

d'où $0,63x = 0,917 - 0,35$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{0,567}{0,63} = 0,9$

3) on cherche : $p_Q(R) = \dfrac{p(R \cap Q)}{p(Q)} = \dfrac{p(R) \times p_R(Q)}{p(Q)}$

$= \dfrac{0,9 \times 0,98}{0,917} \simeq 0,962$

4) N suit une loi binomiale $\mathcal{B}(20\,;0{,}615)$

On cherche le plus petit entier naturel n, tel que :

$$p(N \geq n) \geq 0{,}65$$

A l'aide de la calculatrice, on a $p(N \geq 11) = 1 - p(N < 11)$

$$= 1 - p(N \leq 10)$$

$$\simeq 0{,}797$$

et $p(N \geq 12) = 1 - p(N < 12)$

$$= 1 - p(N \leq 11)$$

$$\simeq 0{,}649$$

Il suffit alors de récompenser les étudiants ayant 12 au plus à l'examen pour couvrir 65 % d'entre eux

5) $S = N_1 + N_2 + \dots + N_{10}$

chaque variable N_i suit $\mathcal{B}(20\,;0{,}615)$

d'où : $E(N_i) = n \times p = 20 \times 0{,}615$, pour tout i entier naturel dans $[1\,;10]$

$$= 12{,}3$$

de même : $V(N_i) = n \times p \times (1-p) = 20 \times 0{,}615 \times 0{,}385 = 4{,}7355$

* Par linéarité de l'espérance mathématique : $E(S) = \sum_{i=1}^{10} E(N_i)$

$$= 10 \times 12{,}3 = \boxed{123}$$

* Comme les variables N_i sont indépendantes,

$$V(S) = \sum_{i=1}^{10} V(N_i) = 10 \times 4{,}7355 = \boxed{47{,}355}$$

6) $M = \dfrac{S}{10}$ a) La variable M modélise la moyenne obtenue par 10 étudiants pris au hasard. (échantillon de 10 étudiants)

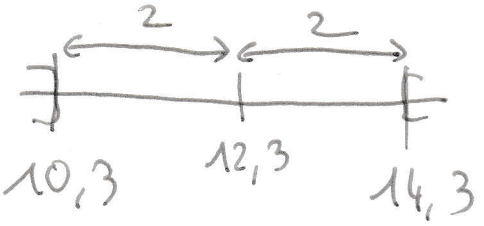
b) Par linéarité :

$$E(M) = \frac{1}{10} \times E(S) = \frac{123}{10} = \boxed{12{,}3}$$

or, $V\left(\frac{1}{10} S\right) = \left(\frac{1}{10}\right)^2 \times V(S)$ (car $V(aX) = a^2 V(X)$)

$$= \frac{1}{100} \times 47{,}355 = \underline{0{,}47355}$$

c) $P(10{,}3 < M < 14{,}3) = ?$

On a : 

Intervalle centré sur $E(M)$

On souhaite avoir : $|M - E(M)| < 2$

or, $P(|M - E(M)| < 2) = 1 - P(|M - E(M)| \geq 2)$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev,

$$P(|M - E(M)| \geq 2) \leq \frac{V(M)}{2^2} = \frac{0{,}47355}{4} = 0{,}1183875$$

D'où :

$$1 - P(|M - E(M)| \geq 2) \geq 1 - 0{,}1183875 \simeq 0{,}88$$

Donc : $P(\underline{|M - E(M)| < 2}) \geq \underline{0{,}88} > \underline{0{,}8}$

L'affirmation de l'énoncé est donc tout à fait exacte

Exercice 2 :

A) Modèle discret :

1) $\dfrac{\text{masse de chlore}}{\text{Volume de la piscine}} = \dfrac{15\,000 \text{ mg}}{5 \times 10^4 \text{ L}} = 0{,}3 \text{ mg.L}^{-1}$

Donc cet ajout de chlore fait augmenter le taux de $0{,}3 \text{ mg.L}^{-1}$

2) $n \in \mathbb{N}$, $\begin{cases} v_{n+1} = 0{,}92 v_n + 0{,}3 \\ v_0 = 0{,}7 \ (= \text{taux de chlore le } 19/06) \end{cases}$

a) Par récurrence :

* Initialisation : on a $v_0 = 0{,}7$

et $v_1 = 0{,}92 v_0 + 0{,}3$

$= 0{,}92 \times 0{,}7 + 0{,}3 = 0{,}944$

on a bien : $v_0 \leq v_1 \leq 4$ la propriété est initialisée

* Hérédité :

On suppose la propriété vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$, c'est-à-dire :

$v_k \leq v_{k+1} \leq 4$

on va alors prouver qu'elle est vraie au rang $k+1$, c'est-à-dire :

$v_{k+1} \leq v_{k+2} \leq 4$.

On a : $v_k \leq v_{k+1} \leq 4$

$\times 0{,}92$: $0{,}92 v_k \leq 0{,}92 v_{k+1} \leq 0{,}92 \times 4 = 3{,}68$

$+0{,}3$: $\underbrace{0{,}92 v_k + 0{,}3}_{} \leq \underbrace{0{,}92 v_{k+1} + 0{,}3}_{} \leq 3{,}68 + 0{,}3$

D'où : $v_{k+1} \leq v_{k+2} \leq 3{,}98 \leq 4$

La propriété est héréditaire

* Conclusion :

La propriété étant initialisée et héréditaire, elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

c'est-à-dire : $v_n \leq v_{n+1} \leq 4$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} \geq v_n$ (d'après 2a))

d'où : (v_n) est une suite croissante

De plus, $v_n \leq 4$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

c'est-à-dire : (v_n) est majorée par 4

d'après le théorème de convergence monotone, toute suite croissante et majorée converge.

Donc : (v_n) est une suite convergente

Soit $\ell = \lim\limits_{n \to +\infty} v_n$, alors ℓ solution de l'équation

$$x = 0{,}92x + 0{,}3 \quad \text{(point fixe)}.$$

$$\iff 0{,}08x = 0{,}3$$

$$\iff x = \frac{0{,}3}{0{,}08} = \frac{15}{4} = 3{,}75$$

Donc : $\ell = 3{,}75$

3) A long terme, le taux de chlore va s'approcher de $\ell = 3{,}75 \text{ mg.L}^{-1}$

or, les pisciniste préconisent un taux compris entre 1 et 3 mg.L^{-1}

Le résultat obtenu ne sera donc pas conforme.

4)
```
def alerte_chlore(s):
    n=0
    v=0.7
    while v<=s:
        n=n+1
        v=0.92*v+0.3
    return n
```

5) alerte_chlore(3) affiche la valeur $\boxed{n = 17}$

Au bout de 17 jours après le mercredi 19 juin le taux de chlore dépasse les 3 mg.L^{-1} !

(Avant il est en-dessous de cette valeur)

Partie B :

$$(E) : y' = -0{,}08y + \frac{q}{50}$$ (q : quantité de chlore, en g, rajoutée dans la piscine chaque jour)

f solution de (E)

1) (E) est du type : $y' = ay + b$, avec $\begin{cases} a = -0{,}08 \\ b = \frac{q}{50} \end{cases}$

Les solutions de (E) sont les fonctions f_c définies sur $\mathbb{R}$, par

$$f_c(x) = Ce^{ax} - \frac{b}{a}, \; C \in \mathbb{R}$$

Ici : $f_c(x) = Ce^{-0{,}08x} - \dfrac{\frac{q}{50}}{-0{,}08}, \; C \in \mathbb{R}$

$$= Ce^{-0{,}08x} + \frac{q}{\underbrace{50 \times 0{,}08}_{=4}}, \; C \in \mathbb{R}$$

Donc les solutions de (E) s'écrivent sous la forme :

$$Ce^{-0{,}08x} + \frac{q}{4}, \; C \in \mathbb{R}$$

c'est-à-dire : $f(x) = Ce^{-0{,}08x} + \frac{q}{4}, \; C \in \mathbb{R}$

2) a) $\lim\limits_{x \to +\infty} -0{,}08x = -\infty$, or, $\lim\limits_{x \to -\infty} e^{x} = 0$

D'où : par composée : $\lim\limits_{x \to +\infty} e^{-0{,}08x} = 0$

Par produit : $\lim\limits_{x \to +\infty} Ce^{-0{,}08x} = 0$

D'où, par somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \frac{q}{4}$

b) D'après l'énoncé, on a $f(0)$ = taux de chlore le mercredi 19 juin
$= 0{,}7$

Or, $f(0) = Ce^{0} + \frac{q}{4} = 0{,}7$

$$\Leftrightarrow \quad C + \frac{q}{4} = 0{,}7$$

A long terme, taux de chlore $= \lim_{x \to +\infty} f(x) = \frac{q}{4} = 2$

$$\Leftrightarrow \quad q = 8$$

D'où : $C + 2 = 0{,}7$

$$\Leftrightarrow C = 0{,}7 - 2 = -1{,}3.$$

Donc : $f(x) = -1{,}3\, e^{-0{,}08x} + 2$

Exercice 3 :

Partie A :

1) $f(-1) = -2$ (par lecture graphique)

$f'(-1)$: coefficient directeur de la tangente à $(\mathcal{C}_f)$ au point d'abscisse -1

= coefficient directeur de (T)

on a $A(0\,;-1)$ $\quad B(-1\,;-2)$

$$f'(-1) = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \frac{-2-(-1)}{-1-0} = \frac{-1}{-1} = 1$$

2) $(\mathcal{C}_f)$ est située de part et d'autre de la droite (T) (= une de ses tangentes)

f serait convexe sur $]-2\,;+\infty[$, si $(\mathcal{C}_f)$ était située toujours au-dessus de ses tangentes.

Donc : f n'est pas convexe sur $]-2\,;+\infty[$

3) $f(x)=0$ admet une seule solution dans $]-2;+\infty[$
car $(\mathcal{C}_f)$ ne coupe qu'une seule fois l'axe des abscisses
Par lecture graphique, cette solution $x_0 \simeq 0,1$

Partie B :

Sur $]-2;+\infty[$, $f(x)=x^2+2x-1+\ln(x+2)$

1) $\lim\limits_{x\to -2} x^2+2x-1=-1$ et $\lim\limits_{x\to -2} x+2=0$
on a : $\lim\limits_{X\to 0} \ln(X)=-\infty$
d'où : par composée $\lim\limits_{x\to -2} \ln(x+2)=-\infty$

Donc : par somme $\lim\limits_{x\to -2} f(x)=-\infty$

Interprétation graphique : La droite d'équation $x=-2$ est asymptote verticale à $(\mathcal{C}_f)$

on admet que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=+\infty$

2) Soit $x>-2$: f est définie et dérivable

on pose : $u(x)=x^2+2x-1$ $\quad v(x)=\ln(x+2)$
$u'(x)=2x+2$ $\quad$ or, $[\ln(w)]'=\dfrac{w'}{w}$

d'où $v'(x)=\dfrac{1}{x+2}$

De plus : $(u+v)'=u'+v'$

D'où : $f'(x)=2x+2+\dfrac{1}{x+2}=\dfrac{(2x+2)(x+2)+1}{x+2}$

$=\dfrac{2x^2+4x+2x+4+1}{x+2}$

Donc : $f'(x)=\dfrac{2x^2+6x+5}{x+2}$

3) Soit $x \in]-2;+\infty[$

on a $x+2 \in]0;+\infty[$

c'est-à-dire : $\underline{x+2>0}$

<u>Signe de $2x^2+6x+5$:</u>

$\Delta = b^2 - 4ac = 36 - 4\times2\times5$

$= 36 - 40 = -4 < 0$: d'où le trinôme est toujours du signe de a.

or, $a = 2 > 0$.

d'où : $2x^2+6x+5 > 0$, pour tout $x \in]-2;+\infty[$

c'est-à-dire : $f'(x) > 0$, pour tout $x \in]-2;+\infty[$

Autrement dit : <u>f est strictement croissante sur $]-2;+\infty[$</u>

x	-2		$+\infty$
signe de $f'(x)$	||	$+$	
Variations de f	|| $-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

4) Sur $]-2;+\infty[$, f est continue et strictement croissante.

De plus : $0 \in]\underset{\underset{x\to-2}{\lim} f(x)}{\underset{\shortparallel}{-\infty}} ; \underset{\underset{x\to+\infty}{\lim} f(x)}{\underset{\shortparallel}{+\infty}}[$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans $]-2;+\infty[$

A l'aide de la calculatrice (méthode par balayage), on a :

$f(0{,}11) \simeq -0{,}021 < 0$ et $f(0{,}12) \simeq 5{,}8\times10^{-3} > 0$

Donc : $\underline{\alpha \simeq 0{,}12}$

5) Sur $]-2\,;+\infty[$:

D'après les variations de f et la question 4)

x	-2		α		$+\infty$
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

6) On sait que $f'(x) = \dfrac{2x^2+6x+5}{x+2}$

f' est dérivable sur $]-2\,;+\infty[$

On pose : $u(x) = 2x^2+6x+5$ $\quad v(x) = x+2$

$u'(x) = 4x+6$ $\quad v'(x) = 1$

or, $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v-uv'}{v^2}$, d'où : $f''(x) = \dfrac{(4x+6)(x+2)-(2x^2+6x+5)}{(x+2)^2}$

$= \dfrac{4x^2+14x+12-2x^2-6x-5}{(x+2)^2}$

$= \dfrac{2x^2+8x+7}{(x+2)^2}$

Déterminons les racines de $2x^2+8x+7$:

$\Delta = b^2-4ac = 64-4\times2\times7 = 64-56 = 8 > 0$

Le binôme admet deux racines réelles distinctes :

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-8+\sqrt{8}}{4} = \dfrac{-8+2\sqrt{2}}{4}$

$= \dfrac{-4+\sqrt{2}}{2} \simeq -1,29 \in]-2\,;+\infty[$

et : $x_2 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-8-\sqrt{8}}{4} = \dfrac{-4-\sqrt{2}}{2} \simeq -2,7 \notin]-2\,;+\infty[$

D'autre part : $(x+2)^2 > 0$, pour tout $x \in]-2\,;+\infty[$

et $2x^2+8x+7$ est du signe de a à l'extérieur de ses racines

or, $a = 2 > 0$ D'où :

x	-2		$\frac{-4+\sqrt{2}}{2}$		
signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	

Autrement dit : f'' s'annule et change de signe

en $x_0 = \frac{-4+\sqrt{2}}{2} \simeq -1{,}29$

$(\mathcal{C}_f)$ admet donc un seul point d'inflexion sur $]-2;+\infty[$
d'abscisse $\frac{-4+\sqrt{2}}{2} \simeq -1{,}29$

Partie (C) : $g(x) = \ln(x+2)$ sur $]-2;+\infty[$

$h(x) = JM^2$, sur $]-2;+\infty[$

1) Soit $x > -2$:

$(O;I;J)$ est un repère orthonormé :

On a : $JM = \sqrt{(x_M - x_J)^2 + (y_M - y_J)^2}$

d'où : $JM^2 = (x-0)^2 + (g(x)-1)^2$ (car $M(x;g(x))$ et $J(0;1)$)

d'où : $JM^2 = x^2 + (\ln(x+2)-1)^2 = h(x)$

2) h est dérivable sur $]-2;+\infty[$ et $h'(x) = \frac{2f(x)}{x+2}$ (admis)

a) D'après 5) partie (B), $f(x) \geq 0$, pour tout $x \in [\alpha;+\infty[$
et $f(x) < 0$, pour tout $x \in]-2;\alpha[$

or, $x+2 > 0$, pour tout $x \in]-2;+\infty[$

Donc : Le signe de $h'(x)$ est le même que celui de $f(x)$

Tableau de variations de h sur $]-2;+\infty[$

x	-2		α		$+\infty$
signe de $h'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
Variations de h	‖	$\searrow$	$h(\alpha)$	$\nearrow$	

b) D'après les variations de h obtenues en c) 2a),

En $x = \alpha$, h atteint son minimum sur $]-2;+\infty[$

D'où : $h(x) \geq h(\alpha)$, pour tout $x \in]-2;+\infty[$

Comme $x \longmapsto \sqrt{x}$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^+$,

$$\underbrace{\sqrt{h(x)}}_{=JM} \geq \sqrt{h(\alpha)} \quad , \text{ pour tout } x \in]-2;+\infty[$$

D'où : $\underline{JM}$ est $\underline{\text{minimal}}$ en $\underline{x = \alpha}$

3) $M_\alpha(\alpha; g(\alpha)) \in (\mathscr{C}_g)$:

a) On sait que $f(\alpha) = 0$

$\iff \alpha^2 + 2\alpha - 1 + \ln(\alpha+2) = 0$

$\iff \underline{\ln(\alpha+2) = 1 - 2\alpha - \alpha^2}$

b) On note (T) : la droite tangente à $(\mathscr{C}_g)$ au point M_α

on pose m_T : coefficient directeur de (T)

$m_T = g'(\alpha)$, or $g'(x) = \dfrac{1}{x+2}$, d'où : $g'(\alpha) = \dfrac{1}{\alpha+2}$

donc : $\underline{m_T = \dfrac{1}{\alpha+2}}$

coefficient directeur de (JM_α) :

$$m' = \frac{y_{M_\alpha} - y_J}{x_{M_\alpha} - x_J} = \frac{\ln(\alpha+2) - 1}{\alpha}$$

D'où : $\underline{m_T \times m'} = \dfrac{\ln(\alpha+2) - 1}{\alpha(\alpha+2)} = \dfrac{\cancel{1} - 2\alpha - \alpha^2 - \cancel{1}}{\alpha(\alpha+2)} = \dfrac{-1 \times (2\alpha + \alpha^2)}{\alpha(\alpha+2)}$

$$= \frac{-\cancel{\alpha(\alpha+2)}}{\cancel{\alpha(\alpha+2)}} = -1$$

Donc : $(T) \perp (JM_2)$

Exercice 4 : $A(2;0;0)$, $B(0;4;3)$, $C(4;4;1)$, $D(0;0;4)$, $H(-1;1;2)$

Affirmation 1 : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix}-2\\0\\4\end{pmatrix}$

$y_{\overrightarrow{AD}} = 0 \neq 4 = y_{\overrightarrow{AC}}$, d'où : il n'existe pas de $k \in \mathbb{R}^*$, $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AC}$

d'où : $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AC}$ non-colinéaires

Autrement dit : A, C et D définissent un plan

On a : $A(2;0;0)$: $8\times x_A - 5y_A + 4z_A - 16 = 16 - 16 = 0$

$C(4;4;1)$: $8\times x_C - 5y_C + 4z_C - 16 = 8\times 4 - 5\times 4 + 4\times 1 - 16$

$= \underbrace{32 - 20}_{=12} + \underbrace{4 - 16}_{-12}$

$= 0$

et $D(0;0;4)$: $8\times x_D - 5y_D + 4z_D - 16 = 4\times 4 - 16$

$= 0$

Autrement dit : A, C et D sont situés sur le plan $(\mathcal{S})$

Donc (ACD) est le plan $(\mathcal{S})$ d'équation

cartésienne : $8x - 5y + 4z - 16 = 0$ (C'est $\boxed{\text{VRAI}}$)

Remarque : On pouvait considérer $\vec{n}\begin{pmatrix}8\\-5\\4\end{pmatrix}$ un vecteur normal à $(\mathcal{S})$

et $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 0$, $\vec{n}\cdot\overrightarrow{AD} = 0$, d'où $\vec{n}$ vecteur normal au plan (ACD)

d'où $(\mathcal{S}) \parallel (ACD)$

or, $8x_A - 5y_A + 4z_A - 16 = 0$, c'est-à-dire $A \in (\mathcal{S})$

Donc $(\mathcal{S}) = (ACD)$

Affirmation 2 :

D'après l'affirmation 1, (ACD) est le plan d'équation cartésienne $8x-5y+4z-16=0$

or, $B(0;4;3)$,

$$8x_B-5y_B+4z_B-16=8\times0-5\times4+4\times3-16$$

$$=-8-16=-24\neq0$$

Donc : $B\notin(ACD)$

A, B, C et D ne sont pas coplanaires (c'est FAUX)

Affirmation 3 : Equation de (ABC) : $x-y+2z-2=0$

$(AC)\subset(ABC)$, soit $H(-1;1;2)$

on a : $x_H-y_H+2z_H-2=-1-1+2\times2-2$

$$=-2+2=0$$

d'où $H\in(ABC)$

d'où : $(BH)\subset(ABC)$

c'est-à-dire (AC) et (BH) sont coplanaires.

De plus : $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\4\\1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix}-1\\-3\\-1\end{pmatrix}$

supposons qu'il existe $k\in\mathbb{R}^*$, $\overrightarrow{BH}=k\overrightarrow{AC}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-1=2k\\-3=4k\\-1=k\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}k=-\frac{1}{2}\\k=-\frac{3}{4}\\k=-1\end{cases}$$

Ils sont tous différents

Donc $\overrightarrow{BH}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires

c'est-à-dire $(BH)\not\parallel(AC)$

Autrement dit : (AC) et (BH) sont sécantes c'est $\boxed{\text{VRAI}}$

Affirmation 4 :

$(ABC) : x - y + 2z - 2 = 0.$

on a : $\vec{n}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

$\vec{DH}\begin{pmatrix}-1\\1\\-2\end{pmatrix}$, on a $-\vec{DH}\begin{pmatrix}1\\-1\\2\end{pmatrix} = \vec{n}$

d'où $\vec{n}$ et $\vec{DH}$ sont colinéaires

c'est-à-dire : $\vec{DH}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

De plus : $H(-1;1;2)$:

$$x_H - y_H + 2z_H - 2 = -1 - 1 + 2\times 2 - 2$$
$$= -2 + 4 - 2$$
$$= 0$$

d'où $H \in (ABC)$

c'est $\boxed{\text{VRAI}}$

Donc : H est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC)

Rque : Pour l'affirmation 3, nous avons utilisé l'équation cartésienne donnée dans l'énoncé.

⚠ Il semble que cette équation soit plutôt à considérer dans l'affirmation 4.

Dans ce cas, on pouvait utiliser des représentations paramétriques de (AC) et (BM), puis "égaler" les deux systèmes.