Spé Tale

Corrigé du sujet 1 (Bac 2024)
Mercredi 19/06/2024

Exercice 1 :

1) $f(x) = 5xe^{-x}$ $(\mathcal{C}_f)$ courbe de f dans un repère orthonormé

Affirmation 1 : Etudions $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$

On a $\lim\limits_{x\to+\infty} 5x = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X}$ (en posant $X = -x$)

$= 0$

Par produit : on a une forme indéterminée du type "$\infty \times 0$"

or, $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty$, par croissance comparée

d'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{x}{e^x} = 0 = \lim\limits_{x\to+\infty} xe^{-x}$

Par produit : $\lim\limits_{x\to+\infty} 5xe^{-x} = 0$

Donc : L'axe des abscisses est asymptote horizontale à $(\mathcal{C}_f)$ en $+\infty$.

c'est $\boxed{\text{VRAI}}$

Affirmation 2 :

f est dérivable sur $\mathbb{R}$, car c'est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

On pose : $u(x) = 5x$ $\quad v(x) = e^{-x}$

$u'(x) = 5$ $\quad v'(x) = -e^{-x}$

or, $(uv)' = u'v + uv'$

d'où : $f'(x) = 5e^{-x} - 5xe^{-x}$

Alors : $f'(x) + f(x) = 5e^{-x} - \cancel{5xe^{-x}} + \cancel{5xe^{-x}}$

d'où : $f'(x) + f(x) = 5e^{-x}$

c'est-à-dire : f est une solution particulière de l'équation (E) sur $\mathbb{R}$.

c'est $\boxed{\text{VRAI}}$

2) Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $u_n \leq v_n \leq w_n$

$\lim_{n \to +\infty} u_n = -1$ et $\lim_{n \to +\infty} w_n = 1$

Affirmation 3 : (v_n) n'est pas nécessairement convergente

Contre-exemple : si $v_n = (-1)^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

on a : $-1 \leq (-1)^n \leq 1$

et pourtant (v_n) n'est pas convergente

c'est $\boxed{\text{FAUX}}$

Affirmation 4 : (u_n) étant croissante, elle est minorée par son premier terme u_0

d'où : $u_0 \leq u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

D'autre part, (w_n) est décroissante, elle est donc majorée par son premier terme, d'où : $w_n \leq w_0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

or, $u_n \leq v_n \leq w_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

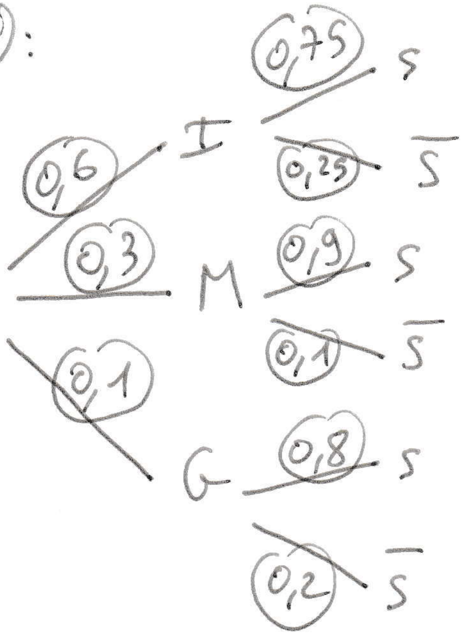
donc : $u_0 \leq u_n \leq v_n \leq w_n \leq w_0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

c'est-à-dire : $u_0 \leq v_n \leq w_0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

c'est $\boxed{\text{VRAI}}$

Exercice 2 :

1)



2) on doit déterminer :

$P(I \cap S)$

On a :

$P(I \cap S) = P(I) \times P_I(S)$

$= 0,6 \times 0,75$

donc $\underline{P(I \cap S) = 0,45}$

3) $P(S) = P(S \cap I) + P(S \cap M) + P(S \cap G)$

$= P(I) \times P_I(S) + P(M) \times P_M(S) + P(G) \times P_G(S)$ (Formule des probabilités totales)

$= 0,6 \times 0,75 + 0,3 \times 0,9 + 0,1 \times 0,8$

$= 0,45 + 0,27 + 0,08 = 0,8$

Donc : $\underline{P(S) = 0,8}$

4) (Inversion du conditionnement) :

$$\underline{P_S(I)} = \frac{P(I \cap S)}{P(S)} = \frac{0,45}{0,8} \simeq \underline{0,563} \text{ (à } 10^{-3} \text{ près)}$$

5) a) On répète trente fois, de manière indépendante, la même épreuve de Bernoulli (= car il y a tirage avec remise)

→ Succès : le client est satisfait

→ Echec : le client n'est pas satisfait

X : compte le nombre de succès à l'issues des trente épreuves.

D'où : X suit une loi binomiale de paramètres $(n ; p)$, $n = 30$, $p = 0,8$

b) $P(X \geq 25) = 1 - P(X < 25) = 1 - P(X \leq 24)$

Avec la calculatrice, on obtient $\underline{P(X \geq 25) \simeq 0,428}$ (à 10^{-3} près)

6) n n'est plus fixé ici

$P(X<n) = 1 - P(X \geq n)$

$= 1 - P(X=n)$ (car X ne peut pas dépasser la valeur de n strictement)

$= 1 - \binom{n}{n} \times 0{,}8^n \times (\underbrace{1-0{,}8}_{=0{,}2})^{n-n}$

$= 1 - 1 \times 0{,}8^n$

or, on souhaite $P(X<n) > 0{,}99$

d'où $1 - 0{,}8^n > 0{,}99$

$\Leftrightarrow 0{,}8^n < 1 - 0{,}99 = 0{,}01$

d'où : $\ln(0{,}8^n) < \ln(0{,}01)$ (car $x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $]0;+\infty[$).

d'où : $n \ln(0{,}8) < \ln(0{,}01)$

or, $\ln(0{,}8) < 0$, car $0{,}8 \in]0;1]$

d'où $n > \dfrac{\ln(0{,}01)}{\ln(0{,}8)} \simeq 20{,}6$

En prenant un échantillon de 21 personnes, la condition est remplie.

7) $T = T_1 + T_2$ T_1 et T_2 sont indépendantes.

$E(T_1) = 4$ et $V(T_1) = 2$

$E(T_2) = 3$ et $V(T_2) = 1$.

a) Par linéarité de l'espérance mathématique, $E(T) = E(T_1) + E(T_2)$

d'où : $E(T) = 4 + 3 = 7$

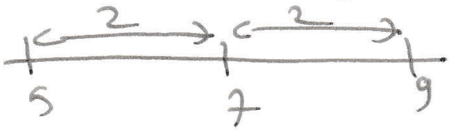
Comme T_1 et T_2 sont indépendantes, $V(T_1+T_2) = V(T_1) + V(T_2)$

$= 2 + 1 = 3$

Donc : $V(T) = 3$

b) on a $E(T) = 7$ et $V(T) = 3$ (d'après a))

on souhaite que $5 \leq T \leq 9$



d'où : $|T - E(T)| \leq 2$

c'est-à-dire : $|T - E(T)| < 3$

D'après l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(|T - E(T)| < 3) \geq \underbrace{1 - \frac{V(T)}{3^2}}_{}$$

$$= 1 - \frac{3}{9} = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Donc : $P(|T - E(T)| < 3) \geq \frac{2}{3}$

Exercice 3 : $A(5;5;0)$, $B(0;5;0)$, $C(0;0;10)$, $D(0;0;-\frac{5}{2})$

1) a) $\vec{n_1}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$ $\quad \vec{CA}\begin{pmatrix}x_A - x_C\\y_A - y_C\\z_A - z_C\end{pmatrix}$, d'où : $\vec{CA}\begin{pmatrix}5\\5\\-10\end{pmatrix}$

de même : $\vec{CD}\begin{pmatrix}0\\0\\-\frac{25}{2}\end{pmatrix}$

Tout d'abord : $\vec{CA}$ et $\vec{CD}$ ne sont pas colinéaires

En effet : $x_{\vec{CD}} = 0 \neq 5 = x_{\vec{CA}}$, d'où il n'existe pas de réel $k \neq 0$ tel que $x_{\vec{CD}} = k \times x_{\vec{CA}}$

c'est-à-dire tel que $\vec{CD} = k\vec{CA}$

donc : $\vec{CD}$ et $\vec{CA}$ non colinéaires (ce sont donc deux vecteurs directeurs du plan (CAD))

De plus, $\vec{n_1} \cdot \vec{CA} = 1 \times 5 - 1 \times 5 + 0 \times 10$

$= 5 - 5 + 0 = 0$, d'où $\underline{\vec{n_1} \perp \vec{CA}}$

et $\vec{n_1} \cdot \vec{CD} = 1 \times 0 - 1 \times 0 + 0 \times \left(-\frac{29}{2}\right)$

$= 0$, d'où : $\underline{\vec{n_1} \perp \vec{CD}}$

Alors $\vec{n_1}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires (donc directeurs) du plan (CAD)

Donc $\underline{\vec{n_1} \text{ est un vecteur normal au plan (CAD)}}$

b) $\vec{n_1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}\begin{matrix} =a \\ =b \\ =c \end{matrix}$ vecteur normal au plan (CAD)

D'où : une équation cartésienne du plan (CAD) est :

$$\underset{\substack{\shortparallel \\ 1}}{a}x + \underset{\substack{\shortparallel \\ -1}}{b}y + \underset{\substack{\shortparallel \\ 0}}{c}z + d = 0$$

d'où : $x - y + d = 0$

or, $A(5;5;0) \in (CAD)$,

d'où : $x_A - y_A + d = 0$

$\iff 5 - 5 + d = 0$

$\iff d = 0$

Donc : $\underline{x - y = 0 \text{ est une équation cartésienne du plan (CAD)}}$

2) $(\mathcal{D}) : \begin{cases} x = \frac{5}{2}t \\ y = 5 - \frac{5}{2}t \\ z = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

a) On admet que $(\mathcal{D}) \cap (CAD) = \{H\}$

Soit $(x;y;z)$ les coordonnées de H.

$(x;y;z)$ est solution du système $\begin{cases} x - y = 0 \\ \begin{cases} x = \frac{5}{2}t \\ y = 5 - \frac{5}{2}t \\ z = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R} \end{cases}$

On a alors :

$$\frac{5}{2}t - \left(5 - \frac{5}{2}t\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow 5t - 5 = 0$$

$$\Leftrightarrow t = 1$$

D'où : H a pour coordonnées $\left(\frac{5}{2}\times 1 \,;\, 5 - \frac{5}{2}\times 1 \,;\, 0\right)$

c'est-à-dire $\left(\frac{5}{2} \,;\, \frac{5}{2} \,;\, 0\right)$

b) D'après a), on a $H \in (CAD)$

De plus : $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} - 0 \\ \frac{5}{2} - 5 \\ 0 - 0 \end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{BH}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

or, $\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (CAD)

et $\frac{5}{2}\overrightarrow{n_1}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$, d'où $\frac{5}{2}\overrightarrow{n_1} = \overrightarrow{BH}$

c'est-à-dire : $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{BH}$ sont colinéaires.

Autrement dit : $\overrightarrow{BH}$ est un vecteur normal au plan (CAD)

Donc : H est bien le projeté orthogonal du point B sur (CAD)

3) a) $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} - 5 \\ \frac{5}{2} - 5 \\ 0 - 0 \end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ -\frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}$

Alors : $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BH} = -\frac{5}{2}\times\frac{5}{2} + \left(-\frac{5}{2}\right)\times\left(-\frac{5}{2}\right) + 0\times 0$

$= -\frac{25}{4} + \frac{25}{4} = 0$, d'où $\overrightarrow{AH} \perp \overrightarrow{BH}$

Donc : le triangle AHB est rectangle en H

b) Comme le triangle ABH est rectangle en H,

$$\text{Aire}(ABH) = \frac{AH \times HB}{2}$$

or, $AH = \sqrt{x_{\overrightarrow{AH}}^2 + y_{\overrightarrow{AH}}^2 + z_{\overrightarrow{AH}}^2}$

$$= \sqrt{\left(-\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{\sqrt{2 \times 25}}{2} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

de même : $BH = \sqrt{x_{\overrightarrow{BH}}^2 + y_{\overrightarrow{BH}}^2 + z_{\overrightarrow{BH}}^2}$

$$= \sqrt{\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2 + 0^2} = \sqrt{\frac{50}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

D'où : $\text{Aire}(ABH) = \dfrac{\frac{5\sqrt{2}}{2} \times \frac{5\sqrt{2}}{2}}{2} = \dfrac{\frac{25}{2}}{2} = \dfrac{25}{4}$

4) a) A, H, O et B sont situés dans le plan d'équation $z = 0$.

Autrement dit : $O \in (ABH)$

De plus : $\overrightarrow{CO}\begin{pmatrix}0\\0\\-10\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{AH} = 0 \times \left(-\frac{5}{2}\right) + 0 \times \left(-\frac{5}{2}\right) + (-10) \times 0$

$= 0$

et $\overrightarrow{CO}\cdot\overrightarrow{BH} = 0 \times \frac{5}{2} + 0 \times \left(-\frac{5}{2}\right) + (-10) \times 0$

$= 0$

D'où : $\overrightarrow{CO}$ orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (BAH)

c'est-à-dire : $\overrightarrow{CO}$ vecteur normal au plan (BAH)

Donc : (CO) est bien la hauteur du tétraèdre ABCH issue de C

b) $V(ABCH) = \frac{1}{3} \times \text{Aire}(ABH) \times CO$

$= \frac{1}{3} \times \frac{25}{4} \times \sqrt{0^2 + 0^2 + (-10)^2}$

Donc $\underline{V(ABCH)} = \frac{25}{12} \times 10 = \frac{25 \times 5}{6} = \underline{\frac{125}{6}}$

5) Posons h = distance du point H au plan (ABC).

On a : $V(ABCH) = \frac{1}{3} \times \text{Aire}(ABC) \times h$

or, $\text{Aire}(ABC) = \frac{AB \times BC}{2}$ (car (ABC) rectangle en B)

et $V(ABCH) = \frac{125}{6}$ (d'après 4 b))

avec $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

$= \sqrt{(0-5)^2 + (5-5)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{25} = 5$

et $BC = \sqrt{(x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 + (z_C - z_B)^2}$

$= \sqrt{(0-0)^2 + (0-5)^2 + (10-0)^2}$

$= \sqrt{125} = \sqrt{5 \times 25} = 5\sqrt{5}$

Alors : $\text{Aire}(ABC) = \frac{5 \times 5\sqrt{5}}{2} = \frac{25\sqrt{5}}{2}$

D'où : $\underline{h} = \frac{3V(ABCH)}{\text{Aire}(ABC)} = \frac{3 \times \frac{125}{6}}{\frac{25\sqrt{5}}{2}} = \frac{125}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{2}}{25\sqrt{5}}$

$= \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{\cancel{5}\sqrt{5}}{\cancel{5}}$

Donc : $\underline{h = \sqrt{5}}$

Exercice 4 :

Partie A : Etude de f

Sur $]0;+\infty[$, $f(x) = x - 2 + \frac{1}{2}\ln(x)$

1) a) $\lim\limits_{x \to 0} x = 0$, d'où par différence, $\lim\limits_{x \to 0} x - 2 = -2$

de plus : $\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$

d'où par produit : $\lim\limits_{x \to 0^+} \frac{1}{2}\ln(x) = -\infty$

Et, par somme, $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} x - 2 = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$

Par produit, puis par somme, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

b) On admet que f est dérivable sur $]0;+\infty[$

Si on pose $u(x) = x - 2$, on a $u'(x) = 1$

et $v(x) = \frac{1}{2}\ln(x)$

$(\ln(x))' = \frac{1}{x}$ et $(k \times w)' = k \times w'$

d'où $v'(x) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{x} = \frac{1}{2x}$

de plus : $(u+v)' = u' + v'$

D'où : $f'(x) = 1 + \frac{1}{2x} = \frac{2x}{2x} + \frac{1}{2x} = \frac{2x+1}{2x}$

c) Pour tout $x \in]0;+\infty[$, $2x > 0$ et $2x + 1 > 0$ $\Big\}$ d'où $f'(x) > 0$, pour tout $x \in]0;+\infty[$

c'est-à-dire : f est strictement croissante sur $]0;+\infty[$

d) On suppose que f est deux fois dérivable sur $]0;+\infty[$ 11

Or, $f'(x) = \dfrac{2x+1}{2x}$

On pose : $u(x) = 2x+1$ $\quad v(x) = 2x$

$u'(x) = 2$ $\quad v'(x) = 2$

or, $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, d'où : $f''(x) = \dfrac{2\times 2x - (2x+1)\times 2}{(2x)^2}$

$= \dfrac{\cancel{4x} - \cancel{4x} - 2}{4x^2}$

$f''(x) = \dfrac{-2}{4x^2} = -\dfrac{1}{2x^2}$

or, $2x^2 > 0$, pour tout $x \in]0;+\infty[$ et $-1 < 0$ } d'où : $f''(x) < 0$, pour tout $x \in]0;+\infty[$

Autrement dit : f est concave sur $]0;+\infty[$

2) a) f est continue et strictement croissante sur $]0;+\infty[$ (d'après 1 c))

avec $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ (d'après 1 a))

on a $0 \in]\underbrace{-\infty}_{\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)} ; \underbrace{+\infty}_{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)}[$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires,

l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]0;+\infty[$

or, $f(1) = 1 - 2 + \frac{1}{2}\underbrace{\ln(1)}_{=0}$ $\quad\Big\}\quad$ $f(2) = \cancel{2} \cancel{-2} + \frac{1}{2}\ln(2)$ 12

$= -1 < 0$ $\qquad\qquad\qquad$ $= \frac{1}{2}\ln(2) > 0$

Donc : $\alpha \in [1;2]$

b)

x	0		α		$+\infty$
signe de $f(x)$	||	$-$	0	$+$	

(d'après 1 c) et 2a))

c) On a $f(\alpha) = 0$

$\iff \alpha - 2 + \frac{1}{2}\ln(\alpha) = 0$

$\iff \frac{1}{2}\ln(\alpha) = 2 - \alpha$

$\iff \ln(\alpha) = 2(2-\alpha)$

Partie (B) :

Sur $]0;1]$, $g(x) = -\frac{7}{8}x^2 + x - \frac{1}{4}x^2\ln(x)$

1) On admet que g est dérivable sur $]0;1]$

On pose : $u(x) = -\frac{1}{4}x^2$ $\quad v(x) = \ln(x)$

$u'(x) = -\frac{1}{4}\times 2x$ $\quad v'(x) = \frac{1}{x}$

$= -\frac{1}{2}x$

or, $(uv)' = u'v + uv'$

d'où : $\left[-\frac{1}{4}x^2\ln(x)\right]' = -\frac{1}{2}x\ln(x) - \frac{1}{4}x$

D'où : $g'(x) = -\frac{7}{8}\times 2x + 1 - \frac{1}{2}x\ln(x) - \frac{1}{4}x$

donc $g'(x) = -2x + 1 - \frac{1}{2}x\ln(x)$

Pour $x \in]0;1]$: or, $f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - 2 + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} - 2 - \frac{1}{2}\ln(x)$

D'où : $x\, f\left(\frac{1}{x}\right) = 1 - 2x - x \times \frac{1}{2}\ln(x)$

$= -2x + 1 - \frac{1}{2}x\ln(x) = g'(x)$

Donc : $g'(x) = x\, f\left(\frac{1}{x}\right)$, pour tout $x \in]0;1]$

2) a) $x \in]0;\frac{1}{\alpha}[$, alors $\frac{1}{x} > \frac{1}{\frac{1}{\alpha}} = \alpha$

or, f est croissante sur $]0;+\infty[$

d'où : $f\left(\frac{1}{x}\right) > f(\alpha) = 0$

b) D'après 1), $g'(x) = x\, f\left(\frac{1}{x}\right)$, pour tout $x \in]0;1]$

Pour tout $x \in]0;1]$, $x > 0$

D'où le signe de $g'(x)$ est le même que celui de $f\left(\frac{1}{x}\right)$

D'où le tableau de variations de g sur $]0;1]$:

x	0		$\frac{1}{\alpha}$		1
signe de $g'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de g		$\nearrow$		$\searrow$	

Partie C :

1) a) Sur $]0;1]$: Pour étudier la position relative des courbes $(\mathcal{C}_g)$ et $(\mathcal{P})$, il faut déterminer le signe de :

$g(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x\right)$

Or, $g(x) + \frac{7}{8}x^2 - x = \cancel{-\frac{7}{8}x^2} + \cancel{x} - \frac{1}{4}x^2\ln(x) + \cancel{\frac{7}{8}x^2} - \cancel{x}$

$= -\frac{1}{4}x^2\ln(x)$

Or, pour tout $x \in]0;1]$, $\ln(x) \leq 0$

et $x^2 > 0$ et $-\frac{1}{4} < 0$

D'où : $-\frac{1}{4}x^2\ln(x) \geq 0$, pour tout $x \in]0;1]$

Autrement dit : $(\mathcal{C}_g)$ est située au-dessus de (Γ) sur $]0,1]$

b) $x \longmapsto x^2\ln(x)$ est continue sur $]0,1]$

On pose : $u'(x) = x^2$ $\quad v(x) = \ln(x)$

$u(x) = \frac{x^3}{3}$ $\quad v'(x) = \frac{1}{x}$

D'autre part : u, u', v et v' sont continues sur $]0;1]$

D'après la formule de l'intégration par parties :

$$\int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} u'(x)v(x)\,dx = \left[u(x)v(x)\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} - \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} u(x)v'(x)\,dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}\ln(x)\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1} - \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1}\frac{x^2}{3}\,dx$$

$$= -\frac{\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3}{3}\ln\left(\frac{1}{\alpha}\right) - \frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{\alpha}}^{1}$$

$$= \frac{1}{3\alpha^3}\ln(\alpha) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3\alpha^3}\right)$$

$$= \frac{1}{3\alpha^3}\times 2(2-\alpha) - \frac{1}{9} + \frac{1}{9\alpha^3}$$

$$= \frac{6(2-\alpha) - \alpha^3 + 1}{9\alpha^3} = \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}$$

2)
$$\mathcal{A} = \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} \left[g(x) - \left(-\frac{7}{8}x^2 + x \right) \right] dx$$

$$= \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} -\frac{1}{4} x^2 \ln(x)\, dx$$

$$= -\frac{1}{4} \int_{\frac{1}{\alpha}}^{1} x^2 \ln(x)\, dx$$ (par linéarité de l'intégrale)

or, d'après 1) b)

$$\mathcal{A} = -\frac{1}{4} \times \frac{-\alpha^3 - 6\alpha + 13}{9\alpha^3}$$

Donc : $\mathcal{A} = \dfrac{\alpha^3 + 6\alpha - 13}{36\alpha^3}$