Spé Maths Terminale (M Mangeard)	**Corrigé du devoir de mathématiques :** *Primitives*	Fait le mardi 26 mars 2024

Exercice 1 :

Soit f(x) = - 4 + $\frac{4}{e^x + 1}$, pour tout x∈ℝ

1) Montrer que f(x) = $\frac{-4\,e^x}{e^x + 1}$

Tout d'abord, $e^x + 1 \neq 0$, pour tout x∈ ℝ, d'où f est définie sur ℝ

$$f(x) = -4 + \frac{4}{e^x+1} = \frac{-4\,(e^x + 1)}{e^x+1} + \frac{4}{e^x+1}$$

$$= \frac{-4e^x \cancel{-4} + \cancel{4}}{e^x+1} = \boxed{\frac{-4\,e^x}{e^x + 1}}$$

2) En déduire en justifiant toutes les primitives de f sur ℝ

D'après 1), f est continue sur ℝ. Elle y admet donc des primitives.

On a f(x) = - 4 × $\frac{e^x}{e^x + 1}$.

On pose u(x) = e^x + 1 d'où : u'(x) = e^x

D'où : f(x) = - 4 × $\frac{u'(x)}{u(x)}$

Or, $\frac{u'}{u}$ se primitive en ln(u)

D'où : **$F_K(x) = -4\times\ln(e^x + 1) + K$, avec K∈ ℝ**

Les F_K sont les primitives de f sur ℝ

Exercice 2 :

Soit g(x) = $\frac{1}{4}$ (6x – 5)($3x^2$ – 5x + 2)^6

1) Montrer que g admet des primitives sur ℝ

La fonction g est une fonction polynôme : elle est donc continue sur ℝ. Elle y admet donc des primitives

2) Déterminer la primitive G de g sur ℝ telle que : G(1) = $\frac{1}{2}$

On pose u(x) = $3x^2$ – 5x + 2 d'où : u'(x) = 6x – 5

D'où : g(x) = $\frac{1}{4}$ × u'(x) × $[u(x)]^6$

Or, u'u^n se primitive en $\frac{u^{n+1}}{n+1}$

D'où : $G_K(x) = \frac{1}{4} \times \frac{u^{n+1}}{n+1} + K$, $K \in \mathbb{R}$

C'est-à-dire : $G_K(x) = \frac{1}{4} \times \frac{(3x^2-5x+2)^7}{7} + K$, $K \in \mathbb{R}$

$= \frac{(3x^2-5x+2)^7}{28} + K$, $K \in \mathbb{R}$

Or, $G(1) = \frac{1}{2}$, d'où : $0 + K = \frac{1}{2}$, donc : $K = \frac{1}{2}$

Par conséquent : $\boxed{G(x) = \frac{(3x^2-5x+2)^7}{28} + \frac{1}{2}}$

Exercice 3 :

Soit $h(x) = \frac{3}{2\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1)^2}$

1) Montrer que h admet des primitives sur]0 ;+∞[

h est une fonction définie et continue sur]0 ;+∞[: elle y admet donc des primitives

2) Montrer que $h(x) = 3 \times \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2}$, pour tout x∈]0 ;+∞[

$3 \times \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2} = 3 \times \frac{1}{2\sqrt{x}} \times \frac{1}{(\sqrt{x}+1)^2} = \frac{3}{2\sqrt{x}\,(\sqrt{x}+1)^2} = h(x)$

Donc : $\boxed{h(x) = 3 \times \frac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}+1)^2}}$

3) En déduire une primitive H de h sur]0 ;+∞[

On pose $u(x) = \sqrt{x} + 1$ on a : $u'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

D'où : $h(x) = 3 \times \frac{u'(x)}{(u(x))^2}$, or $\frac{u'}{u^2}$ se primitive en $-\frac{1}{u}$

Alors : $H(x) = 3 \times (-\frac{1}{\sqrt{x}+1}) = -\frac{3}{\sqrt{x}+1}$. H est une primitive de h sur]0 ;+∞[

Exercice 4 :

Soit $i(x) = \frac{1}{(\cos(x))^2}$. On admet que i est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

On pose $I(x) = \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$

Montrer soigneusement que I est une primitive de i sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$

La fonction i est définie et continue sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$: elle y admet donc des primitives.

I est définie et dérivable sur $\mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$:

On pose u(x) = sin(x)   v(x) = cos(x)

u'(x) = cos(x)   v'(x) = -sin(x)

Or, $(\frac{u}{v})' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ d'où : $I'(x) = \frac{\cos(x) \times \cos(x) - \sin(x) \times (-\sin(x))}{(\cos(x))^2}$

$$= \frac{(\cos(x))^2 + (\sin(x))^2}{(\cos(x))^2} = \frac{1}{(\cos(x))^2}$$

Donc :

$\boxed{\text{I'(x) = i(x), c'est-à-dire : I est une primitive de i sur } \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\}}$