Spé Maths Terminale

Corrigé des questions techniques (1)

(juin 2024)

Question (1) : $f(x) = x^2 e^x$

f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de deux fonctions deux fois dérivables sur $\mathbb{R}$.

On pose : $u(x) = x^2$ $\quad v(x) = e^x$

$u'(x) = 2x$ $\quad v'(x) = e^x$

On a : $(uv)' = u'v + uv'$

D'où : $f'(x) = 2xe^x + x^2 e^x$

$= e^x(x^2 + 2x)$

De même, on pose : $u(x) = x^2 + 2x$ $\quad v(x) = e^x$

$u'(x) = 2x + 2$ $\quad v'(x) = e^x$

or, $(uv)' = u'v + uv'$

D'où : $f''(x) = (2x+2)e^x + (x^2+2x)e^x$

$= e^x(x^2 + 4x + 2)$

On a : $e^x > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$ (En particulier : $e^x \neq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$)

Etudions le signe de $x^2 + 4x + 2$:

$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 8 = 8 > 0$: d'où le trinôme admet deux racines réelles distinctes

$$x_1 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4+\sqrt{8}}{2} = \frac{-4+2\sqrt{2}}{2} = -2+\sqrt{2}$$

et $x_2 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4-\sqrt{8}}{2} = -2-\sqrt{2}$

Le trinôme est du signe de a à l'extérieur de ses racines.

Or, $a = 1 > 0$

D'où le signe de $f''(x)$:

x	$-\infty$		$-2-\sqrt{2}$		$-2+\sqrt{2}$		$+\infty$
signe de $f''(x)$		+	0	−	0	+	

En $x = -2-\sqrt{2}$ et en $x = -2+\sqrt{2}$, f'' s'annule et change de signe.

d'où : $(\mathcal{C}_f)$ admet deux points d'inflexion.

$A(-2-\sqrt{2}\,;\, f(-2-\sqrt{2}))$ et $B(-2+\sqrt{2}\,;\, f(-2+\sqrt{2}))$

avec $f(-2-\sqrt{2}) = (-2-\sqrt{2})^2 e^{-2-\sqrt{2}} \simeq 0,384$

et $f(-2+\sqrt{2}) = (-2+\sqrt{2})^2 e^{-2+\sqrt{2}} \simeq 0,191$.

Question 2 :

$$I = \int_1^2 \ln(x)\,dx$$

On pose : $u'(x) = 1$ et $v(x) = \ln(x)$

$u(x) = x$ $\quad$ $v'(x) = \frac{1}{x}$

Or, u, u', v, v' sont continues sur $[1;2]$

Avec la formule d'intégration par parties :

$$\int_1^2 u'(x)v(x)\,dx = [u(x)v(x)]_1^2 - \int_1^2 u(x)v'(x)\,dx$$

d'où : $I = [x\ln(x)]_1^2 - \int_1^2 x \times \frac{1}{x}\,dx$

$= 2\ln(2) - [x]_1^2 = 2\ln(2) - 1$

Question 3 :

$\lim_{x\to 0} x+2 = 2$
et $\lim_{X\to 2} \sqrt{X} = \sqrt{2}$ } d'où par composée : $\lim_{x\to 0} \sqrt{x+2} = \sqrt{2}$

Par différence : $\lim_{x\to 0} \sqrt{x+2} - \sqrt{2} = 0$

et $\lim_{x\to 0} x = 0$, d'où par quotient, on a une FI du type "$\frac{0}{0}$"

or, $\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} = \frac{(\sqrt{x+2}-\sqrt{2})(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})}$

$= \frac{x+\cancel{2}-\cancel{2}}{x(\sqrt{x+2}+\sqrt{2})} = \frac{1}{\sqrt{x+2}+\sqrt{2}}$

on a : $\lim_{x\to 0} \sqrt{x+2}+\sqrt{2} = 2\sqrt{2}$ (par somme)

Donc : $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{2}}{x} = \frac{1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

Question 4 : $F(x) = (2x^2+5)e^{-3x}$

F est dérivable sur $\mathbb{R}$ car c'est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

On pose : $u(x) = 2x^2+5$ $\quad v(x) = e^{-3x}$
$u'(x) = 4x$ $\quad v'(x) = -3e^{-3x}$

or, $(uv)' = u'v + uv'$

D'où : $F'(x) = 4xe^{-3x} + (2x^2+5)\times(-3e^{-3x})$

$= e^{-3x}(-6x^2-15+4x)$

$= \frac{-6x^2+4x-15}{e^{3x}} = f(x)$

Donc : $F'(x) = f(x)$

c'est-à-dire : F est une primitive de f sur $\mathbb{R}$

Question 5 :

$\vec{u}\begin{pmatrix}5\\-2\\3\end{pmatrix}$ $\vec{v}\begin{pmatrix}1\\0\\-4\end{pmatrix}$

On a : $y_{\vec{v}} = 0$ et $y_{\vec{u}} = -2 \neq 0$

d'où : il n'existe pas de réel k, tel que

$k\vec{v} = \vec{u}$

donc $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires

Question 6 :

$\vec{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\y_B - y_A\\z_B - z_A\end{pmatrix}$, $\vec{AB}\begin{pmatrix}-5-1\\-3-2\\2+1\end{pmatrix}$, d'où $\vec{AB}\begin{pmatrix}-6\\-5\\3\end{pmatrix}$

de même : $\vec{AC}\begin{pmatrix}-2\\-4\\4\end{pmatrix}$ et $\vec{AD}\begin{pmatrix}-6\\2\\-6\end{pmatrix}$

On suppose qu'il existe $(\lambda ; \mu) \in \mathbb{R}^2$, $\vec{AD} = \lambda\vec{AB} + \mu\vec{AC}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -6 = -6\lambda - 2\mu \\ 2 = -5\lambda - 4\mu \\ -6 = 3\lambda + 4\mu \quad (\times 2) \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -18 = 6\mu \quad \leftarrow L_1 + L_3 \\ 2 = -5\lambda - 4\mu \\ -12 = 6\lambda + 8\mu \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = -3 \\ 5\lambda = -4\times(-3) - 2 = 10 \\ -12 = 6\lambda + 8\mu \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \mu = -3 \\ \lambda = 2 \\ 6\times 2 + 8\times(-3) = 12 - 24 = -12 \text{ (c'est bon)} \end{cases}$

D'où : $\overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$ sont trois vecteurs coplanaires

(⇒ ils ne constituent donc pas une base de l'espace)

Question 7 : $(E) : y' - 3y = 2e^{3x}$

$\varphi(x) = (ax+b)e^{3x}$ φ est dérivable sur $\mathbb{R}$, car c'est le produit de deux fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$.

On pose : $u(x) = ax + b$ $\quad v(x) = e^{3x}$

$u'(x) = a$ $\quad v'(x) = 3e^{3x}$ $\quad (\text{car } (e^{f})' = f'e^{f})$

or, $(uv)' = u'v + uv'$

d'où : $\varphi'(x) = ae^{3x} + 3(ax+b)e^{3x}$

$= e^{3x}(3ax + 3b + a)$

or, φ est une solution de $(E) \Leftrightarrow \varphi'(x) - 3\varphi(x) = 2e^{3x}$

$\Leftrightarrow e^{3x}(\cancel{3ax} + 3b + a - \cancel{3ax} - 3b) = 2e^{3x}$

$\Leftrightarrow \cancel{e^{3x}}(a) = 2\cancel{e^{3x}}$, car $e^{3x} \neq 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow a = 2$, d'où $\varphi(x) = (2x+b)e^{3x}$

Rque :
(Pour le calcul de b, on aurait pu fixer une condition initiale du type $\varphi(0) = 1$)

Question 8 : $(P) : 2x - 3y + z - 1 = 0$

$A(-2; 3; 5)$, Soient $(x_H; y_H; z_H)$ les coordonnées du point H

$\overrightarrow{AH}\begin{pmatrix} x_H + 2 \\ y_H - 3 \\ z_H - 5 \end{pmatrix}$

On a $\vec{u}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (P)

Alors : $\overrightarrow{AH}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires

$\iff \exists k \in \mathbb{R},\ \overrightarrow{AH} = k\vec{u}$

$\iff \exists k \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x_H + 2 = 2k \\ y_H - 3 = -3k \\ z_H - 5 = k \end{cases}$

$\iff \exists k \in \mathbb{R},\ \begin{cases} x_H = 2k - 2 \\ y_H = -3k + 3 \\ z_H = k + 5 \end{cases}$

D'autre part : $H \in (P)$

$\iff 2x_H - 3y_H + z_H - 1 = 0$

$\iff 2(2k-2) - 3(-3k+3) + k + 5 - 1 = 0$

$\iff 4k + 9k + k = 4 + 9 - 5 + 1 = 9$

$\iff 14k = 9$

$\iff k = \frac{9}{14}$

D'où : $\begin{cases} x_H = 2\times\frac{9}{14} - 2 = \frac{9}{7} - \frac{14}{7} = -\frac{5}{7} \\ y_H = -3\times\frac{9}{14} + 3 = -\frac{27}{14} + \frac{42}{14} = \frac{15}{14} \\ z_H = \frac{9}{14} + 5 = \frac{9}{14} + \frac{70}{14} = \frac{79}{14} \end{cases}$

Donc : $H\left(-\frac{5}{7} ; \frac{15}{14} ; \frac{79}{14}\right)$

Question 9 : $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix}-6\\-3\\-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{CE}\begin{pmatrix}-8\\-3\\2\end{pmatrix}$ Supposons qu'il existe $k \in \mathbb{R}$, $\overrightarrow{CE} = k\overrightarrow{CD}$

$\iff \begin{cases} -8 = -6k \\ -3 = -3k \\ 2 = -k \end{cases} \iff \begin{cases} k = \frac{8}{6} = \frac{4}{3} \\ k = 1 \\ k = -2 \end{cases}$

les k sont tous distincts, d'où : $\vec{CD}$ et $\vec{CE}$ ne sont pas colinéaires

a) $\vec{n}\begin{pmatrix} 9 \\ -20 \\ 6 \end{pmatrix}$: $\vec{n}.\vec{CD} = 9\times(-6)-20\times(-3)+6\times(-1)$

$= -54+60-6 = 0$

et $\vec{n}.\vec{CE} = 9\times(-8)-20\times(-3)+6\times 2$

$= -72+60+12$

$= 0$

d'où $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non-colinéaires du plan (CDE)

Donc $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (CDE)

b) $\vec{n}\begin{pmatrix} 9 \\ -20 \\ 6 \end{pmatrix}$ vecteur normal au plan (CDE)

D'où une équation cartésienne du plan (CDE) est :

$$9x-20y+6z+d=0$$

or, $C(5;4;3)\in(CDE)$, d'où : $9x_C-20y_C+6z_C+d=0$

$\Leftrightarrow 9\times5-20\times4+6\times3+d=0$

$\Leftrightarrow 45-80+18+d=0$

$\Leftrightarrow d=17$

Donc : $9x-20y+6z+17=0$ est une équation cartésienne du plan (CDE)

Question 10 : $n\in\mathbb{N}^*$, $\frac{3+2n}{n}\leq u_n\leq\frac{5+2n}{n}$

or, $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3+2n}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{n}+2=2$, car $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{3}{n}=0$

de même : $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5+2n}{n}=\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{5}{n}+2=2$

D'après le théorème d'encadrement (ou théorème des gendarmes)

(u_n) est convergente et $\lim\limits_{n\to+\infty}u_n=2$

Question 11 :

$f(x) = \frac{5x}{3x^2+1}$ f est défini et continue sur $\mathbb{R}$
elle y admet donc des primitives.

On pose $u(x) = 3x^2+1$
$u'(x) = 6x$, d'où : $f(x) = \frac{\frac{5}{6}u'(x)}{u(x)}$

or, $\frac{u'}{u}$ se primitive en $\ln(u)$

D'où : $F(x) = \ln(3x^2+1) + k$, $k \in \mathbb{R}$ (les F sont les primitives de f sur $\mathbb{R}$)

or, $F(-1) = 0$, d'où $\ln(4) + k = 0$
$\Leftrightarrow k = -\ln(4)$

Donc : $F(x) = \ln(3x^2+1) - \ln(4) = \ln\left(\frac{3x^2+1}{4}\right)$

Question 12 :

Il faut choisir deux cartes parmi les quatre rois du jeu et les trois autres parmi les quarante-huit autres que les rois :

$$\binom{4}{2} \times \binom{48}{3} = \frac{4!}{2!(4-2)!} \times \frac{48!}{3!(48-3)!}$$

$$= 6 \times 17296 = 103\,776$$

Question 13 : ALGEBRE comporte sept lettres

a) Pour déterminer le nombre total d'anagrammes possibles, il suffit de compter toutes les permutations d'un ensemble à sept éléments.
Il y en a $7! = 5040$

b) Il y a trois voyelles et quatre consonnes

$3 \times 5! \times 4 = 1440$ anagrammes possibles commençant par une voyelle et se terminant par une consonne

Question 14 :

Comme ce sont des coordonnées, l'ordre intervient

Il faut donc déterminer le nombre de 3-uplets dans un ensemble à dix éléments (les éléments sont distincts)

Ce sont donc des 3-arrangements :

$$\text{Le total} = \frac{10!}{(10-3)!} = \frac{10!}{7!} = 8\times 9\times 10$$
$$= \underline{720}$$

Question 15 : $f(x) = \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)$

$\ln(u)$ est défini et dérivable si et seulement si $u > 0$

Etude du signe de $\frac{x+1}{x-1}$:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
signe de $x+1$		$-$	0	$+$		$+$	
signe de $x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
signe de $\frac{x+1}{x-1}$		$+$	0	$-$	$\|$	$+$	

D'où : f est définie et dérivable sur $]-\infty;-1[\,\cup\,]1;+\infty[$

De plus : $[\ln(u)]' = \frac{u'}{u}$

On pose : $u(x) = x+1$ $\quad v(x) = x-1$

$u'(x) = 1$ $\quad v'(x) = 1$

or, $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

D'où : $f'(x) = \frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2} = \frac{-2}{(x-1)^2}$

Question 16 : $\overrightarrow{FG}\begin{pmatrix}3\\-3\\-5\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (FG)

soit $M(x;y;z) \in (FG)$, $\overrightarrow{FM}\begin{pmatrix}x+1\\y-4\\z-2\end{pmatrix}$

$\overrightarrow{FM}$ et $\overrightarrow{FG}$ sont deux vecteurs directeurs de la même droite

Ils sont donc colinéaires.

On a $\overrightarrow{FM} = t\overrightarrow{FG}$, $t \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} x+1 \\ y-4 \\ z-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t \\ -3t \\ -5t \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 3t-1 \\ y = -3t+4 \\ z = -5t+2 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

c'est une représentation paramétrique de la droite (FG)

Question (17) : $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + 1 \\ u_0 = -1 \end{cases}$. on admet que : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = 3$

```
def seuil():
    n = 0
    u = -1
    while u <= 2.99:
        n = n+1
        u = (2/3)*u + 1
    return n.
```

Question (18) :

$\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$

$\lim\limits_{X \to +\infty} \ln(X) = +\infty$

Par composée : $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x^2) = +\infty$

or, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$, d'où par différence, on a une FI du type "$\infty - \infty$"

$x^2 \times \left[\frac{\ln(x^2)}{x^2} - 1\right]$, or $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{X \to +\infty} \frac{\ln(X)}{X} = 0$

par composée : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x^2)}{x^2} = 0$

Par différence : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\frac{\ln(x^2)}{x^2} - 1\right) = -1$

D'où, par produit, $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2\left(\frac{\ln(x^2)}{x^2} - 1\right) = -\infty$

Question 19 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq u_{n+1} \leq u_n \leq \frac{1}{2}$

On a : (u_n) est une suite décroissante (car $u_{n+1} \leq u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$)

De plus, (u_n) est minorée par 0

D'après le théorème de convergence monotone, toute suite décroissante et minorée est convergente.

Donc (u_n) est une suite convergente

Question 20 : $I_n = \int_1^{\pi} x^n \sin(x)\,dx$, $n \in \mathbb{N}$ ($x \longmapsto x^n \sin(x)$ est continue sur $[1;\pi]$ donc intégrable sur $[1;\pi]$)

$$I_{n+1} - I_n = \int_1^{\pi} x^{n+1} \sin(x)\,dx - \int_1^{\pi} x^n \sin(x)\,dx$$

$$= \int_1^{\pi} x^n \sin(x)\,(x-1)\,dx \text{ (par linéarité de l'intégrale)}$$

or, pour $x \in [1;\pi]$, $x - 1 \geq 0$

de plus : $\sin(x) \geq 0$ et $x^n \geq 0$

D'où : $x^n \sin(x)(x-1) \geq 0$, pour tout $x \in [1;\pi]$

Par positivité de l'intégrale, $\underbrace{\int_1^{\pi} x^n \sin(x)(x-1)\,dx}_{= I_{n+1} - I_n} \geq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Donc : La suite (I_n) est croissante

Question 21 : X suit $\mathcal{B}(45; 0{,}28)$ (À l'aide de la calculatrice)

a) $P(X = 13) \simeq 0{,}129$

b) $P(X \geq 12) = 1 - P(X < 12)$

$= 1 - P(X \leq 11)$

$\simeq 0{,}6342$

c) $P(5 \leq X \leq 19) = P(X \leq 19) - P(X \leq 4)$

$\simeq 0{,}831$

Question 22 :

En utilisant l'arbre : $n \in \mathbb{N}^*$

$$p(A_{n+1}) = a_{n+1} = p(A_{n+1} \cap A_n) + p(A_{n+1} \cap \overline{A_n})$$
$$= p(A_n) \times p_{A_n}(A_{n+1}) + p(\overline{A_n}) \times p_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$$

(Formule des probabilités totales)

$\Leftrightarrow \quad a_{n+1} = a_n \times 0{,}8 + (1 - a_n) \times 0{,}3$

$\Leftrightarrow \quad a_{n+1} = 0{,}8a_n - 0{,}3a_n + 0{,}3$

$\Leftrightarrow \quad a_{n+1} = 0{,}5a_n + 0{,}3$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$