Correction du bac blanc n° 2

Sujet 2

Exercice 1 :

1) seuil() : Pour obtenir le nombre de mois à attendre pour que la valeur dépasse 200 €, il faut prendre le a

Réponse a

2) $f(x) = x^2 \ln(x)$, pour $x \in]0;+\infty[$

$F(x) = \frac{1}{3}x^3\left(\ln(x) - \frac{1}{3}\right)$ F est dérivable sur $]0;+\infty[$

On pose : $u(x) = \frac{1}{3}x^3$ $\quad v(x) = \ln(x) - \frac{1}{3}$

$u'(x) = x^2$ $\quad v'(x) = \frac{1}{x}$

or, $(uv)' = u'v + uv'$, d'où : $F'(x) = x^2\left(\ln(x) - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{3}x^3 \times \frac{1}{x}$

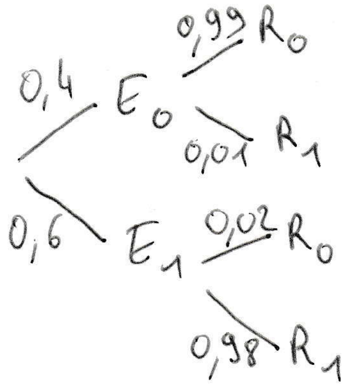
$= x^2\ln(x) - \cancel{\frac{1}{3}x^2} + \cancel{\frac{1}{3}x^2}$

$= x^2\ln(x) = f(x)$

D'où : F est bien une primitive de f sur $]0;+\infty[$

Réponse a

3)



$p(E_0 \cap R_1) = p(E_0) \times p_{E_0}(R_1)$

$= 0,4 \times 0,01$

$= 0,004$

Réponse d

4) $p_{R_1}(E_0) = \frac{p(E_0 \cap R_1)}{p(R_1)} = \frac{0,004}{p(E_0 \cap R_1) + p(E_1 \cap R_1)}$

$= \frac{0,004}{p(E_0) \times p_{E_0}(R_1) + p(E_1) \times p_{E_1}(R_1)} = \frac{0,004}{0,4 \times 0,01 + 0,6 \times 0,98}$

D'où : $p_{R_1}(E_0) \simeq 0,007$

Réponse c

5) "il y a une erreur de transmission" $= (E_0 \cap R_1) \cup (E_1 \cap R_0)$

La probabilité de cet événement est :

$$p(E_0 \cap R_1) + p(E_1 \cap R_0) = 0,4 \times 0,01 + 0,6 \times 0,02$$
$$= 0,016$$

Réponse b

$p(\text{"octet transmis sans erreur"}) = 0,88$

6) Soit X : la variable aléatoire qui compte les octets sans erreur sur les 10 transmis

X suit une loi binomiale de paramètres $(10 ; 0,88)$

$$P(X \geq 1) = 1 - P(X < 1)$$
$$= 1 - P(X=0) = 1 - \binom{10}{0} \times \underbrace{0,88^0}_{=1} \times (1-0,88)^{10-0}$$
$$= 1 - 1 \times 0,12^{10}$$
$$= 1 - 0,12^{10}$$

Réponse a

7) $N \in \mathbb{N}$:

$$P(X = N) \geq 0,1$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{\binom{N}{N}}_{=1} \times 0,88^N \times 0,12^{\overbrace{N-N}^{=0}} \geq 0,1$$
$$\Leftrightarrow 0,88^N \geq 0,1$$
$$\Leftrightarrow \ln(0,88^N) \geq \ln(0,1) \quad (\text{car } x \mapsto \ln(x) \text{ est strictement croissante sur }]0;+\infty[)$$
$$\Leftrightarrow N \ln(0,88) \geq \ln(0,1)$$
$$\Leftrightarrow N \leq \frac{\ln(0,1)}{\ln(0,88)} \quad (\text{car } \ln(0,88) < 0)$$

or, $\dfrac{\ln(0{,}1)}{\ln(0{,}88)} \simeq 18{,}01$

Le plus grand entier naturel vérifiant l'inégalité précédente est 18. Donc : $n_0 = 18$ Réponse b

Exercice 2 :

$A(-1;-1;3)$ $B(1;1;2)$ $C(1;-1;7)$

$D(-1;6;8)$, $E(11;-9;2)$ $(\Delta) = (DE)$

1) a) $D(-1;6;8)$

$x_D = -1 + 4t = -1 \iff 4t = 0 \iff t = 0$

$6 - 5\times 0 = 6 = y_D$

$8 - 2\times 0 = 8 = z_D$

d'où : Les coordonnées de D vérifient la représentation paramétrique donnée

$x = -1 + 4t = 11$

$\iff 4t = 12$

$\iff t = 3$

or, $6 - 5\times 3 = 6 - 15 = -9 = y_E$

$8 - 2\times 3 = 8 - 6 = 2 = z_E$

D'où les coordonnées de E vérifient la représentation paramétrique donnée

or, $D \neq E$,

donc : (Δ) admet pour représentation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 6 - 5t \\ z = 8 - 2t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

b) On a : $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-5\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (Δ)

comme $(\Delta') \parallel (\Delta)$, $\vec{u}$ est aussi un vecteur directeur de (Δ')

or, $O\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \in (\Delta')$, d'où une représentation paramétrique de (Δ') est :

$$\begin{cases} x = 4k \\ y = -5k \\ z = -2k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$$

2) a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}x_B - x_A\\ y_B - y_A\\ z_B - z_A\end{pmatrix}$, d'où : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$

et $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}2\\0\\4\end{pmatrix}$

Supposons $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ colinéaires :
il existe $\lambda \in \mathbb{R}^*$, $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$

$$\iff \begin{cases} 2 = 2\lambda \\ 0 = 2\lambda \\ 4 = -\lambda \end{cases} \iff \begin{cases} \lambda = 1 \\ \lambda = 0 \\ \lambda = -4 \end{cases}$$

d'où : il n'existe pas de réel $\lambda \neq 0$ tel que : $\overrightarrow{AC} = \lambda \overrightarrow{AB}$

Donc : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ non-colinéaires

Par conséquent : A, B, C définissent un plan

b) $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-5\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (Δ)

de plus : $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AB} = 2\times 4 + 2\times(-5) + (-1)\times(-2)$
$= \cancel{8} - \cancel{10} + \cancel{2} = 0$, d'où $\vec{u} \perp \overrightarrow{AB}$

et $\vec{u} \cdot \overrightarrow{AC} = \cancel{4\times 2} + \underbrace{(-5)\times 0}_{0} + \cancel{(-2)\times 4}$
$= 0$, d'où $\vec{u} \perp \overrightarrow{AC}$

or, $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont deux vecteurs directeurs du plan (ABC)

Donc : $\vec{u}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

c'est-à-dire : $(\Delta) \perp (ABC)$

c) $\vec{u}\begin{pmatrix}4\\-5\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (ABC)

D'où : Une équation cartésienne de (ABC) est donnée par :

$$4x - 5y - 2z + d = 0$$

or, $A(-1;-1;3) \in (ABC)$

D'où : $4\times(-1) - 5\times(-1) - 2\times 3 + d = 0$

$\Leftrightarrow -4 + 5 - 6 + d = 0$

$\Leftrightarrow d = 5$

Donc : $4x - 5y - 2z + 5 = 0$ est une équation cartésienne du plan (ABC).

3) a) $G(7;-4;4)$

Représentation paramétrique de (Δ) : $\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 6 - 5t, \ t \in \mathbb{R} \\ z = 8 - 2t \end{cases}$

$$\left.\begin{array}{l} x_G = 7 = -1 + 4t \\ \Leftrightarrow 4t = 8 \\ \Leftrightarrow t = 2 \\ \text{or, } 6 - 5\times 2 = 6 - 10 = -4 = y_G \\ \text{et } 8 - 2\times 2 = 4 = z_G \end{array}\right\} \text{Donc : } G \in (\Delta)$$

b) H : projeté orthogonal de G sur (ABC)
or, $G \in (\Delta)$ et $(\Delta) \perp (ABC)$

d'où : H est l'intersection de (Δ) avec (ABC)

$$\begin{cases} 4x-5y-2z+5=0 \\ \begin{cases} x=-1+4t \\ y=6-5t \\ z=8-2t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

D'où : $4(-1+4t)-5(6-5t)-2(8-2t)+5=0$

$\Leftrightarrow 16t+25t+4t = 45$

$\Leftrightarrow 45t = 45$

$\Leftrightarrow t = 1$

$$\begin{cases} x=-1+4=3 \\ y=6-5=1 \\ z=8-2=6 \end{cases}$$

Donc : Les coordonnées de H sont $(3;1;6)$

c) La distance du point G au plan (ABC) est GH

or, $GH = \sqrt{(x_H-x_G)^2+(y_H-y_G)^2+(z_H-z_G)^2}$

$= \sqrt{(3-7)^2+(1+4)^2+(6-4)^2}$

$= \sqrt{16+25+4}$

$= \sqrt{45} = \sqrt{9\times 5} = \sqrt{9}\times\sqrt{5} = 3\sqrt{5}$

Donc : $GH = 3\sqrt{5}$

4) a) On a $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 2\times 2 + \underbrace{\cancel{2\times 0}}_{0} + (-1)\times 4$

$= 0$

Donc le triangle ABC est rectangle en A

b) Si on considère le triangle ABC comme base du tétraèdre, GH est la hauteur correspondante

D'où : $V = \frac{1}{3}\times \text{Aire}(ABC)\times GH = \frac{1}{3}\times\frac{\sqrt{2^2+2^2+(-1)^2}\times\sqrt{2^2+4^2}}{2}\times 3\sqrt{5}$

Donc : $V = \frac{1}{\cancel{3}}\times\frac{\cancel{3}\times\cancel{2}\sqrt{5}}{\cancel{2}}\times 3\sqrt{5} = 3\times 5 = \boxed{15}$

Exercice 3 :

$A(0;2) \quad B(2;0)$

Partie 1 :

1) $f(0) = \boxed{2}$ $\quad$ $f'(0)$: c'est le coefficient directeur de la droite (AB)

Par lecture graphique :

$$f'(0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2}{+2} = -1$$

2) f semble convexe sur $[0;+\infty[$ (car $(\mathcal{C}_f)$ semble située au-dessus de ses tangentes)

Partie 2 :

$(E) : y' = -y + e^{-x}$

1) Soit $g(x) = xe^{-x}$, $x \in \mathbb{R}$

g est dérivable sur $\mathbb{R}$.

On pose : $u(x) = x \qquad v(x) = e^{-x}$

$u'(x) = 1 \qquad v'(x) = -e^{-x}$

et $(uv)' = u'v + uv'$

D'où : $g'(x) = 1 \times e^{-x} + x \times (-e^{-x})$

$= -xe^{-x} + e^{-x}$

or, $-g(x) = -xe^{-x}$

D'où : $g'(x) = -g(x) + e^{-x}$

Donc : g est une solution particulière de l'équation (E)

2) $(H) : y' = -y$ c'est une équation du type $y' = ay$ avec $a = -1$

Les solutions de (H) sont les f_K définies sur $\mathbb{R}$ par :

$f_K(x) = Ke^{ax}$, $K \in \mathbb{R}$, d'où : $f_K(x) = Ke^{-x}$, $K \in \mathbb{R}$

3) Pour obtenir toutes les solutions de (E), on ajoute une solution particulière de (E) à toutes celles de (H).

Donc : Les solutions de (E) sont données par :

$$Ke^{-x} + xe^{-x}, \quad K \in \mathbb{R}$$

4) On a : $f(x) = ke^{-x} + xe^{-x}$ et $f(0) = 2$
(d'après 3))

D'où : $ke^{0} + 0e^{0} = 2 \iff K = 2$

Donc : $f(x) = 2e^{-x} + xe^{-x}$

Partie ③ :

$$f(x) = (x+2)e^{-x}$$

1) a) f est dérivable sur $\mathbb{R}$

On pose : $u(x) = x+2$ $\quad v(x) = e^{-x}$
$u'(x) = 1$ $\quad v'(x) = -e^{-x}$

Or, $(uv)' = u'v + uv'$

D'où : $f'(x) = 1 \times e^{-x} + (x+2)(-e^{-x})$
$= (-x-2)e^{-x} + e^{-x}$

donc $f'(x) = (-x-1)e^{-x}$

b) $e^{-x} > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

$-x-1 \geq 0 \iff -x \geq 1$
$\iff x \leq -1$

Donc : $f'(x) \geq 0$, pour tout $x \leq -1$

Tableau de variations de f sur $\mathbb{R}$:

x	$-\infty$		-1		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
Variation de f		$\nearrow$	e	$\searrow$	

$f(-1) = (-1+2)e^{1}$
$= e$: maximum de f sur $\mathbb{R}$
(car f' s'annule et change de signe en $x = -1$)

2) On admet que : $f''(x) = xe^{-x}$

On a : $e^{-x} > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

et $xe^{-x} \geq 0$, pour tout $x \in [0;+\infty[$

or, f est convexe sur $I \Leftrightarrow f'' > 0$ sur I

Donc : f est convexe sur $[0;+\infty[$

Exercice 4 :

Partie A : $f(x) = \dfrac{\ln(x)}{x}$, sur $[1;+\infty[$

1) Par croissance comparée, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$

2) On suppose que f est bien dérivable sur $[1;+\infty[$

On pose $u(x) = \ln(x)$ $\quad v(x) = x$

$u'(x) = \dfrac{1}{x}$ $\quad v'(x) = 1$

or, $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$, d'où : $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x)}{x^2}$

donc $f'(x) = \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}$

3) $x^2 > 0$, pour tout $x \in [1;+\infty[$

$1 - \ln(x) \geq 0 \Leftrightarrow \ln(x) \leq 1$

$\Leftrightarrow e^{\ln(x)} \leq e^1$ (car $x \mapsto e^x$ est strictement croissante)

$\Leftrightarrow x \leq e$

Tableau de variations :

$f(e) = \dfrac{\ln(e)}{e} = \dfrac{1}{e}$

x	1		e		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	0	$-$	
variations de f	0	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

3) $k \in \mathbb{R}^+$

a) $0 \leq k \leq \frac{1}{e}$

f est continue sur $[1 ; e]$, f strictement croissante sur $[1; e]$

et $k \in [\underbrace{f(1)}_{=0} ; \underbrace{f(e)}_{=\frac{1}{e}}]$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires

l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution dans $[1 ; e]$

b) si $k > \frac{1}{e}$: $f(x) = k$ n'a pas de solution dans $[1 ; +\infty[$

car $\frac{1}{e}$ est le maximum de f sur $[1 ; +\infty[$

Partie B :

$g(x) = e^{\frac{x}{4}}$

$\begin{cases} u_{n+1} = e^{\frac{u_n}{4}} = g(u_n) \\ u_0 = 1 \end{cases}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et $g'(x) = \frac{1}{4} e^{\frac{x}{4}} > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

donc : g est croissante sur $\mathbb{R}$

2) Par récurrence :

* Initialisation : $u_0 = 1$ et $u_1 = e^{\frac{u_0}{4}} = e^{\frac{1}{4}} \simeq 1,28$

d'où : $u_0 < u_1 \leq e$: la propriété est initialisée

* On suppose la propriété vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$

c'est-à-dire : $u_k \leq u_{k+1} \leq e$

Comme g est définie et strictement croissante sur $\mathbb{R}$, alors :

$\underbrace{g(u_k)}_{= u_{k+1}} \leq \underbrace{g(u_{k+1})}_{= u_{k+1}} \leq \underbrace{g(e)}_{= e^{\frac{e}{4}} \simeq 1,97} < e$

D'où : la propriété est héréditaire

* Conclusion : La propriété est initialisée et héréditaire
elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

3) D'après 2), $u_n \leq u_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

d'où (u_n) est une suite croissante

or, $u_n \leq e$, pour tout $n \in \mathbb{N}$
c'est-à-dire : (u_n) est majorée par e

D'après le théorème de convergence monotone, la suite (u_n) est convergente

$\ell = \lim_{n \to +\infty} u_n$

4)a) D'après le théorème du point fixe, ℓ est solution de l'équation

$$g(x) = x$$

$$\iff e^{\frac{x}{4}} = x$$

b) $e^{\frac{x}{4}} = x > 0$, car $e^{\frac{x}{4}} > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$

d'où : $\ln\left(e^{\frac{x}{4}}\right) = \ln(x)$

$$\iff \frac{x}{4} = \ln(x)$$

$$\iff \frac{1}{4} = \frac{\ln(x)}{x} = f(x)$$

Donc ℓ solution de $f(x) = \frac{1}{4}$

5) A l'aide de la calculatrice, $\ell \simeq 1,43$
(méthode par balayage)