Spé T^{ale}

Correction bac blanc n° 2

Sujet 1

Exercice 1 :

1) On a : $F(x) = (x-1)e^x$ et F dérivable sur $\mathbb{R}$

$$F'(x) = e^x + (x-1)e^x$$
$$= xe^x = f(x)$$

Donc : Réponse b

2) $\begin{cases} u_{n+1} = 0{,}75u_n + 5 \\ u_0 = 2 \end{cases}$

Cette fonction renvoie la plus petite valeur de n telle que : $u_n \geq 19$.

Donc : Réponse : c

3) $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_K + x_L}{2} \\ y_M = \dfrac{y_K + y_L}{2} \\ z_M = \dfrac{z_K + z_L}{2} \end{cases}$ or, K est le milieu de [SD]

d'où : $\begin{cases} x_K = \dfrac{x_S + x_D}{2} = \dfrac{0+0}{2} = 0 \\ y_K = \dfrac{y_S + y_D}{2} = \dfrac{0+(-1)}{2} = -\dfrac{1}{2} \\ z_K = \dfrac{z_S + z_D}{2} = \dfrac{1+0}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

et L est le milieu de [SC]

d'où : $\begin{cases} x_L = \dfrac{x_C + x_S}{2} = \dfrac{1+0}{2} = \dfrac{1}{2} \\ y_L = \dfrac{y_S + y_C}{2} = \dfrac{0+0}{2} = 0 \\ z_L = \dfrac{z_S + z_C}{2} = \dfrac{1+0}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$

D'où : $\begin{cases} x_M = \dfrac{0+\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{1}{4} \\ y_M = \dfrac{-\frac{1}{2}+0}{2} = -\dfrac{1}{4} \\ z_M = \dfrac{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}}{2} = \dfrac{1}{2} \end{cases}$ Donc : $M\left(\dfrac{1}{4} ; -\dfrac{1}{4} ; \dfrac{1}{2}\right)$

Réponse b

4) $\overrightarrow{AS}\begin{pmatrix} x_S - x_A \\ y_S - y_A \\ z_S - z_A \end{pmatrix}$, d'où : $\overrightarrow{AS}\begin{pmatrix} 0+1 \\ 0-0 \\ 1-0 \end{pmatrix}$

Donc : $\overrightarrow{AS}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ c'est-à-dire :

Réponse b

5) Soit $M(x;y;z) \in (AS)$

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AM}$ et $\overrightarrow{AS}$ sont colinéaires, d'où : $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AS}$, $t \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z - 1 = t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = t + 1 \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Réponse c

6) $S(0;0;1)$, $B(0;1;0)$, $C(1;0;0)$

. $0+0+1-1=0$

. $0+1+0-1=0$

. $1+0+0-1=0$

Les coordonnées de S, C et B vérifient $x+y+z-1$

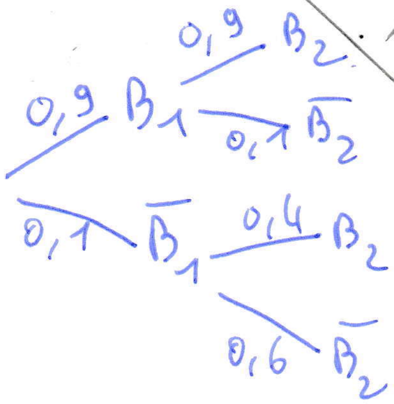
Réponse b

Exercice 2 :

Partie A :

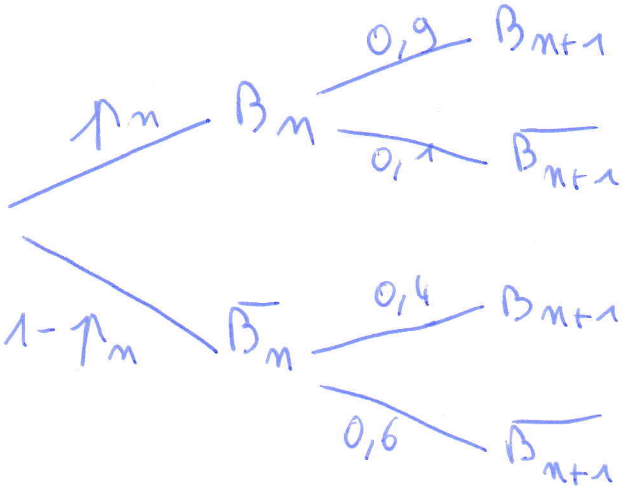
$p_0 = 1$

$p_1 = p(B_1) = 0,9$



$$p_2 = p(B_2) = p(B_1 \cap B_2) + p(\overline{B_1} \cap B_2)$$
$$= p(B_1) \times p_{B_1}(B_2) + p(\overline{B_1}) \times p_{\overline{B_1}}(B_2)$$
$$= 0,9 \times 0,9 + 0,1 \times 0,4$$
$$= 0,81 + 0,04 = 0,85$$

2)



3) Soit $n \in \mathbb{N}$, $p_{n+1} = p(B_{n+1})$

$$= p(B_{n+1} \cap B_n) + p(B_{n+1} \cap \overline{B_n})$$

$$= p(B_n) \times p_{B_n}(B_{n+1}) + p(\overline{B_n}) \times p_{\overline{B_n}}(B_{n+1})$$

$$p_{n+1} = p_n \times 0,9 + (1-p_n) \times 0,4$$

donc : $p_{n+1} = p_n(0,9 - 0,4) + 0,4$

$$\underline{p_{n+1} = 0,5\, p_n + 0,4 \text{, pour tout } n \in \mathbb{N}}$$

4) a) <u>Par récurrence :</u>

* <u>Initialisation</u> : $p_0 = 1$ et $p_1 = 0,9$; on a : $1 > 0,9 > 0,8$ $\Big\}$ d'où : $p_0 > p_1 > 0,8$

La <u>propriété</u> est initialisée

* <u>Hérédité</u> : On suppose la propriété vraie pour un certain $k \in \mathbb{N}$

c'est-à-dire : $p_k > p_{k+1} > 0,8$

d'où : $0,5\, p_k > 0,5\, p_{k+1} > 0,5 \times 0,8 = 0,4$

d'où : $\underbrace{0,5\, p_k + 0,4}_{= p_{k+1}} > \underbrace{0,5\, p_{k+1} + 0,4}_{= p_{k+2}} > 0,4 + 0,4 = 0,8$

D'où la <u>propriété</u> est héréditaire

* <u>Conclusion</u> : La prop. est initialisée et héréditaire, donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

b) D'après 4a), $p_n \geq p_{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

d'où : (p_n) est une suite décroissante

D'autre part : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $p_n > 0{,}8$

c'est-à-dire : 0,8 est un minorant de (p_n)

or, toute suite décroissante et minorée converge (Théorème de convergence monotone)

Donc : (p_n) est une suite convergente

$$\ell = \lim_{n \to +\infty} p_n$$

5) D'après le théorème du point fixe, ℓ est l'unique solution de l'équation $f(x) = x$, avec $p_{n+1} = f(p_n)$

c'est-à-dire : $f(x) = 0{,}5x + 0{,}4$

On a : $0{,}5x + 0{,}4 = x$

$\iff -0{,}5x = -0{,}4$

$\iff x = -\dfrac{0{,}4}{-0{,}5} = \dfrac{4}{5}$ Donc : $\ell = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$

Même après un grand nombre de semaines, la fiabilité des trottinettes reste d'au moins 80 %.

6) On admet : $p_n = 0{,}8 + 0{,}2 \times 0{,}5^n$

$p_n < 0{,}85 \iff 0{,}8 + 0{,}2 \times 0{,}5^n < 0{,}85$

$\iff 0{,}2 \times 0{,}5^n < 0{,}05$

$\iff 0{,}5^n < \dfrac{0{,}05}{0{,}2} = 0{,}25$

$\iff \ln(0{,}5^n) < \ln(0{,}25)$ (car $x \mapsto \ln(x)$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{*}_{+}$)

$\iff n \times \ln(0{,}5) < \ln(0{,}25)$

$$\iff \quad n > \underbrace{\frac{\ln(0{,}25)}{\ln(0{,}5)}}_{2} \quad (\text{car } \ln(0{,}5) < 0)$$

Donc : 3 est le plus petit entier naturel tel que $p_n < 0{,}85$

Partie (B) :

1) On répète 15 fois, de manière indépendante, la même épreuve de Bernoulli (expérience aléatoire assimilée à un tirage avec remise)
- Succès : la trottinette prélevée est en bon état
- Echec : la trottinette prélevée n'est pas en bon état.

La probabilité du succès $p = 0{,}8$

On a un schéma de Bernoulli de paramètres $\begin{cases} n = 15 \\ p = 0{,}8 \end{cases}$

X est la variable aléatoire discrète qui compte le nombre de trottinettes en bon état sur les 15 considérées

Alors : X suit une loi binomiale de paramètres $\begin{cases} n = 15 \\ p = 0{,}8 \end{cases}$

2) On a : $P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10)$
$= 1 - P(X \leq 9)$

A l'aide de la calculatrice, on obtient :

$P(X \geq 10) \simeq 0{,}939$

Exercice (3) : $(E) : y' = -0{,}4y + 0{,}4$

1) a) Soit $f(x) = k$, $k \in \mathbb{R}$ telle que f soit solution de (E)

On a : $f'(x) = 0$, d'où $0 = -0{,}4 \times k + 0{,}4$

$\iff \quad -0{,}4 \times k = -0{,}4$

$\iff \quad k = 1$

Donc : $f(x) = 1$, pour tout $x \in [0 ; +\infty[$ est une solution de (E)

b) Soit (E_0) : $y' = -0,4y$

(E_0) est une équation du type $y' = ay$, avec $a = -0,4$

Les solutions de (E_0) sont les f_K telles que : $f_K(t) = Ke^{-0,4t}$
avec $K \in \mathbb{R}$

L'ensemble des solutions de (E) est constitué de toutes les solutions de (E_0) et d'une solution particulière de (E)

Donc : ce sont les f_C définies sur $[0; +\infty[$, par :

$$\underline{f_C(t) = Ce^{-0,4t} + 1, \quad C \in \mathbb{R}}$$

2) $g(0) = 10$, d'où $Ce^0 + 1 = 10$
$\iff C = 10 - 1 = 9$

Donc : $\underline{g(t) = 9e^{-0,4t} + 1}$

Partie II :

$$p(t) = \frac{1}{g(t)} = \frac{1}{1 + 9e^{-0,4t}}$$

1) $\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{t \to +\infty} -0,4t = -\infty \\ \text{et } \lim\limits_{T \to -\infty} e^T = 0 \end{array}\right\}$ Par composée : $\lim\limits_{t \to +\infty} e^{-0,4t} = 0$

D'où : $\lim\limits_{t \to +\infty} 1 + 9e^{-0,4t} = 1$

Donc, par quotient : $\underline{\lim\limits_{t \to +\infty} p(t)} = \frac{1}{1} = \underline{1}$

2) p est dérivable sur $[0; +\infty[$

On pose $u(t) = 1 + 9e^{-0,4t}$, d'où : $u'(t) = 9 \times (-0,4)e^{-0,4t}$
$= -3,6e^{-0,4t}$

or, $\left(\frac{1}{u}\right)' = \frac{-u'}{u^2}$

D'où : $p'(t) = \frac{3{,}6e^{-0{,}4t}}{(1+9e^{-0{,}4t})^2}$, pour tout $t \in [0;+\infty[$

---

3)a). $t \mapsto p(t)$ est une fonction continue sur $[0;+\infty[$

· D'après 2), $p'(t) > 0$, pour tout $t \in [0;+\infty[$
c'est-à-dire : p strictement croissante sur $[0;+\infty[$

· De plus : $p(0) = \frac{1}{1+9} = \frac{1}{10} < 1$
et $\lim\limits_{t \to +\infty} p(t) = 1$ (d'après 1) partie II)

· Enfin : $\frac{1}{2} \in \left[\frac{1}{10} ; 1\right]$

D'après le corollaire du théorème des valeurs intermédiaires,
l'équation : $p(t) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution
dans $[0;+\infty[$. Notons α cette solution

b) Avec la calculatrice, on trouve $\alpha \simeq 5{,}5$

Partie III :

1) $p(t) = \frac{1}{1+9e^{-0{,}4t}}$ — On a : $p'(t) = \frac{3{,}6e^{-0{,}4t}}{(1+9e^{-0{,}4t})^2}$

On a : $0{,}4\,p(t)(1-p(t)) = \frac{0{,}4}{1+9e^{-0{,}4t}}\left(\frac{9e^{-0{,}4t}}{1+9e^{-0{,}4t}}\right)$
$= \frac{3{,}6e^{-0{,}4t}}{(1+9e^{-0{,}4t})^2} = p'(t)$

Donc : p est solution de l'équation $y' = 0{,}4y(1-y)$

De plus : $p(0) = \frac{1}{1+9} = \frac{1}{10}$

2) 10% des écoles ont accès à Internet (condition initiale) 8

. $p(t)$ modélise la proportion des écoles ayant accès à Internet

à l'instant t

En suivant ce modèle, au bout d'un certain nombre d'années, toutes les écoles auront accès à Internet.

. Au bout de cinq ans et demi, 50% des écoles auront accès à Internet

. $p(0)$: proportion en 2020, il y a bien 10% des écoles qui ont accès à Internet.

Exercice 4 :

Partie I :

1) $f'\left(\frac{1}{e}\right)$ = coefficient directeur de (T_A)

or, (T_A) est horizontale, d'où $\underline{f'\left(\frac{1}{e}\right)=0}$

$f'(1)$ = coefficient directeur de (T_B)

Par lecture graphique : $\underline{f'(1)} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1}{+1} = \underline{-1}$

2) $(T_B) : y = f'(1)(x-1)+f(1)$

$\Leftrightarrow y = -1(x-1)+2$

$\Leftrightarrow \underline{y = -x+3}$ (équation réduite de (T_B))

Partie II :

$f(x) = \frac{2+\ln(x)}{x}$, sur $]0;+\infty[$

1) On a : $f\left(\frac{1}{e}\right) = \frac{2+\ln\left(\frac{1}{e}\right)}{\frac{1}{e}} = \frac{2+\overbrace{\ln(1)}^{=0}-\ln(e)}{\frac{1}{e}} = \frac{2-1}{\frac{1}{e}}$

$= \frac{1}{\frac{1}{e}} = e$

or, $A\left(\frac{1}{e}; e\right)$, d'où : $\underline{A \in (\mathcal{C}_f)}$

$f(1) = \frac{2+\ln(1)}{1} = \frac{2}{1} = 2$

or, $B(1;2)$, donc $B \in (\mathcal{C}_f)$

$f(x) = 0 \iff \frac{2+\ln(x)}{x} = 0$

$\iff 2 + \ln(x) = 0$

$\iff \ln(x) = -2$

$\iff e^{\ln(x)} = e^{-2}$

$\iff x = \frac{1}{e^2}$

Donc : $(\mathcal{C}_f)$ coupe l'axe des abscisses en un unique point de coordonnées $\left(\frac{1}{e^2} ; 0\right)$

2) $\lim\limits_{x \to 0^+} x = 0^+$

$\lim\limits_{x \to 0^+} \ln(x) = -\infty$, d'où $\lim\limits_{x \to 0^+} 2 + \ln(x) = -\infty$ } Par quotient, $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = -\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} 2 + \ln(x) = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$ } Forme indéterminée du type : $\frac{\infty}{\infty}$

or, $\frac{2+\ln(x)}{x} = \frac{2}{x} + \frac{\ln(x)}{x}$, avec $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$

et $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{2}{x} = 0$

Par somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$

3) Soit $x \in]0;+\infty[$, f est dérivable

on pose : $u(x) = 2 + \ln(x)$ $\quad v(x) = x$

$u'(x) = \frac{1}{x}$ $\quad v'(x) = 1$

Or, $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

D'où : $f'(x) = \dfrac{\frac{1}{x}(x) - (2+\ln(x))}{x^2}$

$= \dfrac{1-2-\ln(x)}{x^2} = \dfrac{-1-\ln(x)}{x^2}$

4) Soit $x \in]0;+\infty[$:

$x^2 > 0$, pour tout $x \in]0;+\infty[$

$-1-\ln(x) \geq 0 \iff \ln(x) \leq -1$

$\iff e^{\ln(x)} \leq e^{-1}$) car $x \mapsto e^x$ est strictement croissante

$\iff x \leq \frac{1}{e}$

D'où : $f'(x) \geq 0$ pour tout $x \leq \frac{1}{e}$

Tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$

x	0		$\frac{1}{e}$		$+\infty$
Signe de $f'(x)$	‖	$+$	0	$-$	
Variations de f	‖ $-\infty$	$\nearrow$	e	$\searrow$	0

$f\left(\frac{1}{e}\right) = e$

5) On admet que pour tout $x \in]0;+\infty[$, $f''(x) = \dfrac{1+2\ln(x)}{x^3}$

$x^3 > 0$, pour tout $x \in]0;+\infty[$

$1+2\ln(x) \geq 0 \iff 2\ln(x) \geq -1$

$\iff \ln(x) \geq -\frac{1}{2}$

$\iff e^{\ln(x)} \geq e^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{e}}$ car $x \mapsto e^x$ strictement croissante

$\iff x \geq \frac{1}{\sqrt{e}}$

D'où : $f''(x) \geq 0$, pour tout $x \in \left[\frac{1}{\sqrt{e}};+\infty\right[$: plus grand intervalle sur lequel f est convexe