BAC BLANC

Lycée Saint Jean XXIII

MATHEMATIQUES

Enseignement de spécialité

Sujet 2

12 Avril 2024

Durée de l'épreuve : 4 heures

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5

ATTENTION : Il est impératif de rendre l'énoncé avec votre copie ainsi que **tous** les brouillons utilisés.

Calculatrice autorisée en **MODE EXAMEN**

Les élèves doivent ***traiter les quatre exercices.***

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 : (5 points)

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.

AUCUNE JUSTIFICATION n'est demandée

1) Une action est cotée à 57 €. Sa valeur augment de 3 % tous les mois.
   La fonction Python seuil() qui renvoie le nombre de mois à attendre pour que sa valeur dépasse 200 € est :

a.
```
def seuil() :
    m=0
    v=57
    while v < 200 :
        m=m+1
        v = v*1.03
    return m
```

b.
```
def seuil() :
    m=0
    v=57
    while v > 200 :
        m=m+1
        v = v*1.03
    return m
```

c.
```
def seuil() :
    v=57
    for i in range (200) :
        v = v*1.03
    return v
```

d.
```
def seuil() :
    m=0
    v=57
    if v < 200 :
        m=m+1
    else :
        v = v*1.03
    return m
```

2) Soit f la fonction définie sur $]\,0\,;+\infty\,[$ par $f(x) = x^2 \ln(x)$
   Une primitive F de f sur $]\,0\,;+\infty\,[$ est définie par :

a. $F(x) = \frac{1}{3}x^3\left(\ln(x) - \frac{1}{3}\right)$

b. $F(x) = \frac{1}{3}x^3\left(\ln(x) - 1\right)$

c. $F(x) = \frac{1}{3}x^2$

d. $F(x) = \frac{1}{3}x^2\left(\ln(x) - 1\right)$

Les cinq questions suivantes s'appuient sur l'énoncé suivant :

On considère un système de communication binaire transmettant des 0 et des 1.

Chaque 0 ou 1 est appelé un bit.

En raison d'interférences, il peut y avoir des erreurs de transmissions :

Un 0 peut être reçu comme un 1, un 1 peut être reçu comme un 0

Pour un bit choisi au hasard dans le message, on note les événements :

E_0 : « le bit envoyé est un 0 »

E_1 : « le bit envoyé est un 1 »

R_0 : « le bit reçu est un 0 »

R_1 : « le bit reçu est un 1 »

On sait que 40 % des bits envoyés sont des 0

Sachant que le bit envoyé est un 0, la probabilité que le bit reçu soit un 1 est de 0,01.

$p_{E_1}(R_0) = 0,02$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré pour répondre aux questions suivantes :

3) La probabilité que le bit envoyé soit un 0 et que le bit reçu soit un 1 est de :
   a. 0,99 b. 0,396 c. 0,01 d. 0,004
4) La probabilité que le bit envoyé soit un 0 sachant que le bit reçu est un 1 est égale à 10^{-3} près à :
   a. 0,004 b. 0,001 c. 0,007 d. 0,010
5) La probabilité de l'événement « il y a une erreur de transmission » est égale à :
   a. 0,03 b. 0,016 c. 0,16 d. 0,015

Un message de longueur huit bits est appelé un octet.

On admet que la probabilité qu'un octet soit transmis sans erreur est égale à 0,88.

6) On transmet successivement 10 octets de façon indépendante.
   La probabilité qu'au moins 1 octet soit transmis sans erreur est égale à :
   a. $1- (0,12)^{10}$ b. $(0,12)^{10}$ c. $(0,88)^{10}$ d. $1 – (0,88)^{10}$

7) Soit N un entier naturel. On transmet successivement N octets de façon indépendante.
   Soit N_0 la plus grande valeur de N pour laquelle la probabilité que les N octets soient tous transmis sans erreur est supérieure ou égale à 0,1.
   On peut affirmer que :
   a. $N_0 = 17$ b. $N_0 = 18$ c. $N_0 = 19$ d. $N_0 = 20$

Exercice 2 : (5 points)

Dans l'espace rapporté à un repère orthonormé $(O ; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on considère les points

A(−1 ; −1 ; 3), B(1 ; 1 ; 2), C(1 ; −1 ; 7)

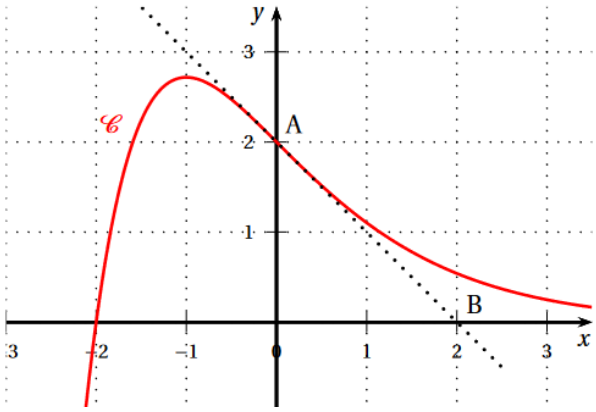
On considère également la droite Δ passant par les points D(−1 ; 6 ; 8) et E(11 ; −9 ; 2).

1) a) Vérifier que la droite Δ admet pour représentation paramétrique :
   $\begin{cases} x = -1 + 4t \\ y = 6 - 5t \\ z = 8 - 2t \end{cases}$ avec $t \in \mathbb{R}$
   b) Préciser une représentation paramétrique de la droite Δ′ parallèle à Δ et passant par l'origine O du repère.
2) a) Montrer que les points A, B et C définissent un plan.
   b) Montrer que la droite Δ est perpendiculaire au plan (ABC).
   c) Montrer qu'une équation cartésienne du plan (ABC) est : $4x - 5y - 2z + 5 = 0$.
3) a) Montrer que le point G(7 ; -4 ; 4) appartient à la droite Δ.
   b) Déterminer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point G sur le plan (ABC).
   c) En déduire que la distance du point G au plan (ABC) est égale à $3\sqrt{5}$.
4) a) Montrer que le triangle ABC est rectangle en A.
   b) Calculer le volume V du tétraèdre ABCG.
   On rappelle que le volume V d'un tétraèdre est donné par la formule $V = \frac{1}{3} \times B \times h$ *où B est l'aire d'une base et h la hauteur correspondant à cette base.*

Exercice 3 : (5 points)

Cet exercice est composé de trois parties indépendantes.

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé, une portion de la courbe représentative *C* d'une fonction f définie sur $\mathbb{R}$:



On considère les points A(0 ; 2) et B(2 ; 0).

Partie 1

Sachant que la courbe *C* passe par A et que la droite (AB) est la tangente à la courbe *C* au point A, donner par lecture graphique :

1) La valeur de f (0) et celle de f ′(0).
2) Un intervalle sur lequel la fonction f semble convexe.

Partie 2

On note (E) l'équation différentielle : $y' = -y + e^{-x}$.

1) On considère la fonction g définie sur IR par $g(x) = xe^{-x}$
   Montrer que g(x) est une solution particulière de (E).
2) Donner toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (H) : $y' = -y$.
3) En déduire toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle (E).
4) Sachant que la fonction f est la solution particulière de (E) qui vérifie f (0) = 2, déterminer une expression de f (x) en fonction de x.

Partie 3

On admet que pour tout nombre réel x, $f(x) = (x + 2)e^{-x}$.

1) On rappelle que f ′ désigne la fonction dérivée de la fonction f .
   a) Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f'(x) = (-x - 1)e^{-x}$.
   b) Étudier le signe de f ′(x) pour tout $x \in \mathbb{R}$ et dresser le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$.
      On ne précisera ni la limite de f en $-\infty$ ni la limite de f en $+\infty$.
      On calculera la valeur exacte de l'extremum de f sur $\mathbb{R}$.
2) On rappelle que f ″ désigne la fonction dérivée seconde de la fonction f et on admet que $f''(x) = x\,e^{-x}$.
   Peut-on affirmer que f est convexe sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$? Justifier.

Exercice 4 : (5 points)

Partie A

On considère la fonction f définie sur $[1 ; +\infty[$ par $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$, où ln désigne la fonction logarithme népérien

1) Donner la limite de la fonction f en $+\infty$.
2) On admet que la fonction f est dérivable sur $[1 ; +\infty[$ et on note f ' sa fonction dérivée.
   a) Montrer que, pour nombre réel $x \geq 1$, $f'(x) = \frac{1-\ln(x)}{x^2}$.
   b) Dresser le tableau de variations complet de la fonction f.
3) Soit k un réel positif ou nul.
   a) Montrer que, si $0 \leq k \leq \frac{1}{e}$, l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution sur l'intervalle $[1 ; e]$.
   b) Si $k > \frac{1}{e}$, l'équation $f(x) = k$ admet-elle des solutions sur l'intervalle $[1 ; +\infty[$? Justifier.

Partie B

Soit g la fonction définie sur IR par $g(x) = e^{\frac{x}{4}}$

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n :

$$U_{n+1} = g(U_n) = e^{\frac{U_n}{4}}.$$

1) Justifier que la fonction g est croissante sur IR
2) Montrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a :
$$U_n \leq U_{n+1} \leq e.$$
3) En déduire que la suite (U_n) est convergente.

On note l la limite de la suite (U_n).

4) a) Justifier que l est solution de l'équation $e^{\frac{x}{4}} = x$
   b) En déduire que l est solution de l'équation $f(x) = \frac{1}{4}$, où la fonction f est étudiée dans la partie A.
5) Donner une valeur approchée à 10^{-2} près de la limite l de la suite (U_n).