BAC BLANC

Lycée Saint Jean XXIII

MATHEMATIQUES

Enseignement de spécialité

Sujet 1

11 Avril 2024

Durée de l'épreuve : 4 heures

Ce sujet comporte 6 pages numérotées de 1 à 6

ATTENTION : Il est impératif de rendre l'énoncé avec votre copie ainsi que **tous** les brouillons utilisés.

Calculatrice autorisée en **MODE EXAMEN**

Les élèves doivent ***traiter les quatre exercices.***

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice 1 :

Cet exercice est un questionnaire à choix multiples. Pour chacune des questions suivantes, une seule des quatre réponses proposées est exacte.

Une réponse exacte rapporte un point. Une réponse fausse, une réponse multiple ou l'absence de réponse à une question ne rapporte ni n'enlève de point.

Pour répondre, indiquer sur la copie le numéro de la question et la lettre de la réponse choisie.

AUCUNE JUSTIFICATION n'est demandée

1) Une primitive de la fonction f, définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = xe^x$, est la fonction F, définie sur $\mathbb{R}$ par :

a) $F(x) = \frac{x^2}{2}e^x$

b) $F(x) = (x - 1)e^x$

c) $F(x) = (x + 1)e^x$

d) $F(x) = x^2e^{x^2}$

2) On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,75u_n + 5$

On considère la fonction « seuil » suivante écrite en Python :

```
def seuil():
    u=2
    n=0
    while u<19:
        u=0.75*u+5
        n=n+1
    return n
```

Cette fonction renvoie :

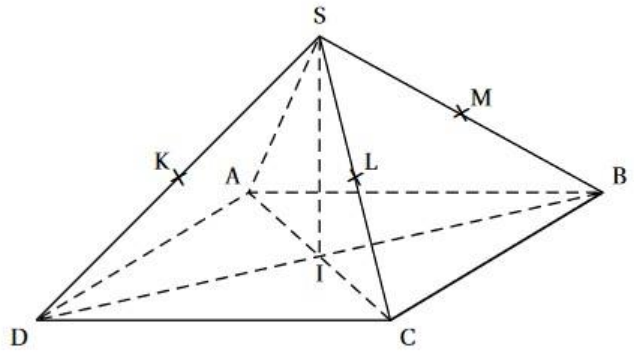
a) La plus grande valeur n telle que $u_n \geq 19$

b) La plus grande valeur n telle que $u_n < 19$

c) La plus petite valeur de n telle que $u_n \geq 19$

d) La plus petite valeur de n telle que $u_n < 19$

Les quatre questions suivantes s'appuient sur la figure ci-dessous :



On se place dans le repère orthonormé de l'espace (I ;$\overrightarrow{IC}$,$\overrightarrow{IB}$, $\overrightarrow{IS}$)

On donne les coordonnées des points suivants dans ce repère :

I(0 ;0 ;0), A(-1 ;0 ;0) , B(0 ;1 ;0) , C(1 ;0 ;0) , D(0 ;-1 ;0) et S(0 ;0 ;1)

3) Les coordonnées du milieu N de [KL] sont :

a) $(\frac{1}{4} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{4})$ b) $(\frac{1}{4} ; -\frac{1}{4} ; \frac{1}{2})$ c) $(-\frac{1}{4} ; \frac{1}{4} ; \frac{1}{2})$ d) $(-\frac{1}{2} ; \frac{1}{2} ;1)$

4) Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AS}$ sont :

a) $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ b) $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ c) $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ d) $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$

5) Une représentation paramétrique de la droite (AS) est :

$\begin{cases} x = -1-t \\ y = t \\ z = -t \end{cases}$ (t∈ $\mathbb{R}$) b) $\begin{cases} x = -1+2t \\ y = 0 \\ z = 1+2t \end{cases}$ (t∈ $\mathbb{R}$) c) $\begin{cases} x = t \\ y = 0 \\ z = 1+t \end{cases}$ (t∈ $\mathbb{R}$) d) $\begin{cases} x = -1-t \\ y = 1+t \\ z = 1-t \end{cases}$ (t∈ $\mathbb{R}$)

6) Une équation cartésienne du plan (SCB) est :

a) y + z – 1 = 0 b) x + y + z – 1 = 0 c) x – y + z = 0 d) x + z – 1 = 0

Exercice 2 :

Les deux parties de cet exercice sont indépendantes.

Dans une grande ville française, des trottinettes électriques sont mises à disposition des usagers. Une entreprise, chargée de l'entretien du parc de trottinettes, contrôle leur état chaque lundi.

Partie A

On estime que :

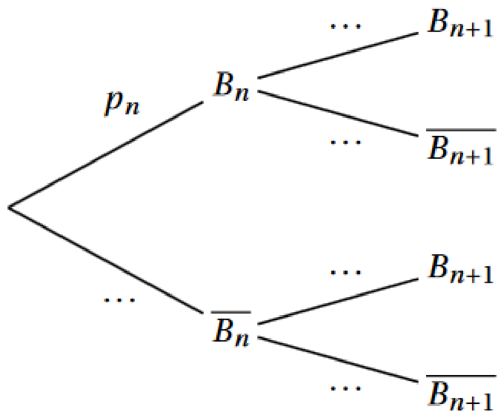
- lorsqu'une trottinette est en bon état un lundi, la probabilité qu'elle soit encore en bon état le lundi suivant est 0,9 ;
- lorsqu'une trottinette est en mauvais état un lundi, la probabilité qu'elle soit en bon état le lundi suivant est 0,4.

On s'intéresse à l'état d'une trottinette lors des phases de contrôle.

Soit n un entier naturel. On note B_n l'évènement « la trottinette est en bon état n semaines après sa mise en service » et p_n la probabilité de B_n .

Lors de sa mise en service, la trottinette est en bon état. On a donc $p_0 = 1$.

1) Donner p_1 et montrer que $p_2 = 0{,}85$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2) Compléter l'arbre pondéré ci-dessous :



3) En déduire que, pour tout entier naturel n, $p_{n+1} = 0{,}5p_n + 0{,}4$.
4) a) Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $p_n > p_{n+1} > 0{,}8$.
   b) En déduire que la suite (p_n) est convergente.

On note l la limite de la suite (p_n)

5) Justifier que l est solution de l'équation f(x) = x où f(x) = 0,5x + 0,4 et déterminer l.
   À partir de ce résultat, quelle communication l'entreprise peut-elle envisager pour valoriser la fiabilité du parc ?

6) On admet pour la suite de l'exercice que $p_n = 0{,}8 + 0{,}2 \times (0{,}5)^n$
   Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $p_n < 0{,}85$

Partie B

Dans cette partie, on modélise la situation de la façon suivante :

- l'état d'une trottinette est indépendant de celui des autres ;
- la probabilité qu'une trottinette soit en bon état est égale à 0,8.

On note X la variable aléatoire qui, à un lot de 15 trottinettes, associe le nombre de trottinettes en bon état.
Le nombre de trottinettes du parc étant très important, le prélèvement de 15 trottinettes peut être assimilé à un tirage avec remise.
1) Justifier que X suit une loi binomiale et préciser les paramètres de cette loi.
2) Calculer la probabilité qu'au moins 10 trottinettes soient en bon état dans un lot de 15.

Exercice 3 :

Partie I

Considérons l'équation différentielle

$$y' = -0{,}4y + 0{,}4$$

où y désigne une fonction de la variable t, définie et dérivable sur [0 ; +∞[.

1) a) Déterminer une solution particulière constante de cette équation différentielle.
   b) En déduire l'ensemble des solutions de cette équation différentielle.
2) Déterminer la fonction g, solution de cette équation différentielle, qui vérifie g (0) = 10.

Partie II

Soit p la fonction définie et dérivable sur l'intervalle [0 ; +∞[par $p(t) = \frac{1}{g(t)} = \frac{1}{1+9e^{-0{,}4t}}$

1) Déterminer la limite de p en +∞.
2) Montrer que $p'(t) = \frac{3{,}6e^{-0{,}4t}}{(1+9e^{-0{,}4t})^2}$ pour tout t ∈ [0 ; +∞[.
3) a) Montrer que l'équation $p(t) = \frac{1}{2}$ admet une unique solution α sur [0 ; +∞[.
   b) Déterminer une valeur approchée de α à 10^{-1} près à l'aide d'une calculatrice.

Partie III

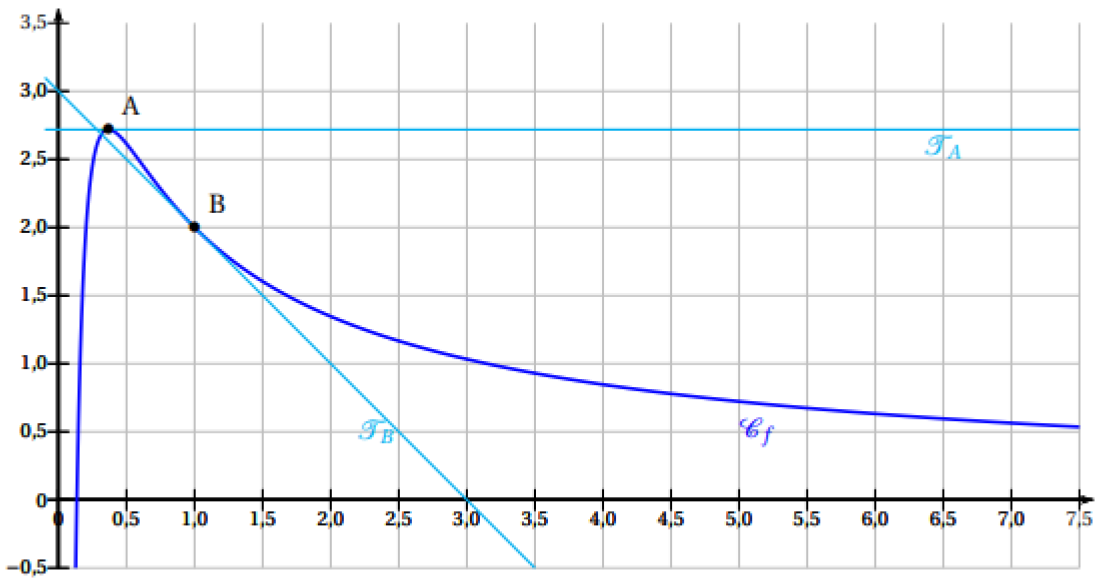
1) p désigne la fonction de la partie II.
   Vérifier que p est solution de l'équation différentielle $y' = 0{,}4y(1-y)$ avec la condition initiale $y(0) = \frac{1}{10}$ où y désigne une fonction définie et dérivable sur [0 ; +∞[.
2) Dans un pays en voie de développement, en l'année 2020, 10 % des écoles ont accès à internet. Une politique volontariste d'équipement est mise en œuvre et on s'intéresse à l'évolution de la proportion des écoles ayant accès à internet. On note t le temps écoulé, exprimé en année, depuis l'année 2020.
   La proportion des écoles ayant accès à internet à l'instant t est modélisée par p(t).
   Interpréter dans ce contexte la limite de la question II 1) puis la valeur approchée de α de la question II 3 b). ainsi que la valeur p(0).

Exercice 4 :

Sur le graphique ci-dessous, on a représenté dans un repère orthonormé :

- la courbe représentative Cf d'une fonction f définie et dérivable sur]0 ; + ∞[;
- la tangente $\mathcal{T}_A$ à la courbe Cf au point A de coordonnées $\left(\frac{1}{e} ; e\right)$.
- la tangente $\mathcal{T}_B$ à la courbe Cf au point B de coordonnées (1 ; 2).

La droite $\mathcal{T}_A$ est parallèle à l'axe des abscisses. La droite $\mathcal{T}_B$ coupe l'axe des abscisses au point de coordonnées (3 ; 0) et l'axe des ordonnées au point de coordonnées (0 ; 3).



On note f ' la fonction dérivée de f.

Partie I

1) Déterminer graphiquement les valeurs f '$(\frac{1}{e})$ et de f '(1).
2) En déduire l'équation réduite de la droite $\mathcal{T}_B$.

Partie II

On suppose maintenant que la fonction f est définie sur]0 ; + ∞[par :

$$f(x) = \frac{2 + \ln(x)}{x}$$

1) Par le calcul, montrer que la courbe Cf passe par les points A et B et qu'elle coupe l'axe des abscisses en un point unique que l'on précisera.
2) Déterminer la limite de f(x) quand x tend vers 0 par valeurs supérieurs, et la limite de f(x) quand x tend vers + ∞.
3) Montrer que, pour tout x ∈ $]\,0\,;\,+\infty\,[$,
$$f'(x) = \frac{-1 - \ln(x)}{x^2}.$$
4) Dresser le tableau de variations de f sur $]0\,;\,+\infty[$.
5) On note f '' la fonction dérivée seconde de f.

   On admet que, pour tout x ∈ $]\,0\,;\,+\infty\,[$, f ''(x) = $\frac{1+2\ln(x)}{x^3}$

   Déterminer le plus grand intervalle sur lequel f est convexe.