BAC BLANC

Lycée Saint Jean XXIII

MATHEMATIQUES

Enseignement de spécialité

Sujet 2

26 et 27 Janvier 2023

Durée de l'épreuve : 4 heures

Ce sujet comporte 5 pages numérotées de 1 à 5

ATTENTION : Il est impératif de rendre l'énoncé avec votre copie ainsi que **tous** les brouillons utilisés.

Calculatrice autorisée en **MODE EXAMEN**

Les élèves doivent ***traiter les quatre exercices.***

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Exercice n°1 : $\approx$ 4 points

Les douanes s'intéressent aux importations de casques audio portant le logo d'une certaine marque. Les saisies des douanes permettent d'estimer que :

- 20 % des casques audio portant le logo de cette marque sont des contrefaçons.
- 2 % des casques non contrefaits présentent un défaut de conception.
- 10 % des casques contrefaits présentent un défaut de conception.

L'agence des fraudes commande au hasard sur un site internet un casque affichant le logo de la marque. On considère les événements suivants :

- C : « le casque est contrefait »
- D : « le casque présente un défaut de conception »

On pourra désigner par $\bar{C}$ et $\overline{D}$ les événements contraires de respectivement C et D
Dans l'ensemble de l'exercice, les probabilités seront arrondies à 10^{-3} près si nécessaire.

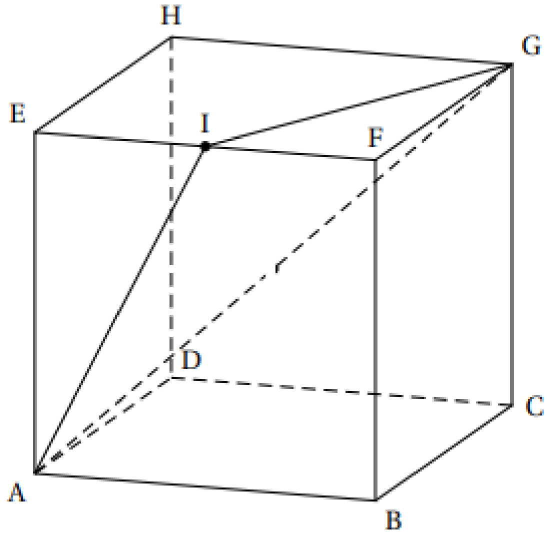
1) Calculer $P(C \cap D)$. On pourra s'appuyer sur un arbre pondéré.
2) Démontrer que la probabilité que le casque commandé au hasard présente un défaut est de $0{,}036$.
3) Le casque a un défaut. Déterminer la probabilité qu'il soit contrefait.
4) On commande 35 casques portant le logo de cette marque. On assimile cette expérience à un tirage aléatoire avec remise. On note X la variable aléatoire qui donne le nombre de casques présentant un défaut de conception dans le lot.
   a) Préciser la nature et les paramètres de la loi de probabilité suivie par X.
   b) Calculer la probabilité qu'il y ait parmi les casques commandés, exactement un casque présentant un défaut de conception en énonçant la formule utilisée.
   c) Calculer $P(2 < X < 8)$
   d) Dans cette question le nombre de casques à commander n n'est pas fixé. Déterminer, à l'aide de la calculatrice, le nombre minimal de casques à commander pour que la probabilité qu'au moins un casque présente un défaut soit supérieure à 85 %

Exercice n°2 : ≈ 5 points

On considère le cube ABCDEFGH d'arête de longueur 1.

L'espace est muni du repère orthonormé $\left(A , \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}\right)$.

Le point I est le milieu du segment [EF] et O le milieu du segment [AG].



1) a) Donner, sans justification, les coordonnées des points A, B, G et I.

   b) Démontrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix}$ est normal au plan (AIG).

   c) En déduire une équation cartésienne du plan (AIG).

2) On note (d) la droite orthogonale au plan (AIG) et passant par B.

   a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d).

   b) Démontrer que le point L $\left(\frac{1}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3}\right)$ est le projeté orthogonal du point B sur le plan (AIG).

   c) Déduire des questions précédentes que la distance du point B au plan (AIG) est égale à $\frac{\sqrt{6}}{3}$

3) On considère la pyramide ABIG.

   Rappel : *Le volume V d'une pyramide est donné par la formule :*

   $V = \frac{1}{3} \times b \times h$, où b est l'aire d'une base et h la hauteur associée à cette base.

   a) En considérant comme base de la pyramide le triangle isocèle AIB, démontrer que le volume de la pyramide ABIG est égale à $\frac{1}{6}$ exprimé en unité de volume.

   b) En exprimant le volume de la pyramide d'une autre manière, en déduire l'aire du triangle AIG, en unité d'aire.

Exercice n°3 : $\approx$ 5 points

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$.

1. Calculer les termes u_1 et u_2. On donnera les résultats sous forme de fractions irréductibles.

2. Conjecturer le sens de variation de la suite (u_n).

3. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $n \leq u_n \leq n + 1$.
4. Calculer $u_{n+1} - u_n$. En déduire le sens de variation de la suite (u_n)
5. a. A l'aide de la question 3), en déduire que, pour tout entier $n \geq 1$, on a :
$$\frac{1}{n} \leq \frac{u_n}{n^2} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$$
   b. Déterminer, en justifiant, la limite suivante : $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{u_n}{n^2}$.
6. On désigne par (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - n$.
   a. Montrer que (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$ puis exprimer v_n en fonction de n.

   b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + \cdots v_n$.
   Exprimer le plus simplement possible S_n en fonction de n puis montrer que :
$$\lim_{n \to +\infty} S_n = 3.$$
7. a. Déduire de la question 4.a. que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.
   b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $T_n = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots u_n$.
   Compléter les lignes 2 et 3 du programme python ci-après pour que le résultat affiché soit T_{20}.

```
1   T=1
2   for k in range(.....,.....):
3       T=T+........+........
4   print(T)
```

<u>Exercice n°4 :</u> ≈ 6 points

Partie A : Lecture à partir d'un tableau de variations

On considère une fonction f admettant le tableau de variations ci- dessous

x	$-\infty$		-1		$-1/3$		0		1		$+\infty$
signe de $f'(x)$		$+$	‖	$+$	0	$-$	‖	$-$	0	$+$	
f	2	↗	$+\infty$ ‖ $-\infty$	↗	-7	↘	$-\infty$ ‖ $+\infty$	↘	1	↗	2

1) Donner le domaine de définition de f
2) Lire les limites aux bornes du domaine de définition.
3) Préciser l'équation des éventuelles asymptotes horizontales et verticales à $\mathcal{C}_f$
4) En déduire une allure de la courbe de f après avoir construit les éventuelles asymptotes.

Partie B : Démonstration et interprétation graphique

On considère dans cette partie que la fonction f de la partie A est définie par :

$$f(x) = \frac{2x^2-x+1}{x^2+x}$$

Soit $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère.

1) Démontrer que le domaine de définition de f est $D = \mathbb{R}\backslash\{-1; 0\}$
2) Déterminer par le calcul les limites suivantes :

   a) en $-\infty$ b) en -1

3) Interpréter graphiquement ces résultats
4) Etudier la position relative entre $\mathcal{C}_f$ et la droite (d) d'équation $y = 2$ sur $]-\infty; -1[$
5) a) Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout $x \in D$, $f'(x) = \frac{3x^2-2x-1}{(x^2+x)^2}$

   b) Etudier le signe de $f'(x)$ sur D

   c) En déduire les variations de f et dresser son tableau de variations.

6) Déterminer les coordonnées des éventuels points d'intersection entre $\mathcal{C}_f$ et l'axe des abscisses.