Spé Maths Terminale (M Mangeard)	**Corrigé de l'évaluation n°1 :** *Rappels de Première*	Faite le vendredi 30 septembre 2022

Exercice 1 :

Résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 2x - 3y = 16 & (\times 2) \\ -4x + 5y = -27 \end{cases}$$

Par combinaisons :

$$\begin{cases} 4x - 6y = 32 \\ -4x + 5y = -27 & L_2 \leftarrow L_1 + L_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 6y = 32 \\ -y = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4x = 32 + 6 \times (-5) = 2 \\ y = -5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} \\ y = -5 \end{cases}, \text{ d'où : } S = \left\{\left(\frac{1}{2} ; -5\right)\right\}$$

Exercice 2 :

Soit x un réel.

On note les vecteurs suivants : $\vec{u}\binom{7}{x^2}$ et $\vec{v}\binom{3x^2-1}{-5}$. Calculer les valeurs de x pour que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ soient orthogonaux.

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$

$$\Leftrightarrow 7(3x^2 - 1) + x^2 \times (-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow 21x^2 - 7 - 5x^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow 16x^2 = 7$$

$$\Leftrightarrow x^2 = \frac{7}{16}, \text{ d'où } x = \frac{\sqrt{7}}{4} \text{ ou } -\frac{\sqrt{7}}{4}$$

Exercice 3 :

Soient les points E(-3 ;1) et F(4 ;-2).

1) Déterminer une équation cartésienne de la droite (EF)

$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} x_F - x_E \\ y_F - y_E \end{pmatrix}$, d'où $\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (EF)

Soit $M(x;y) \in (EF)$:

$\overrightarrow{EM}\begin{pmatrix} x+3 \\ y-1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (EF)

or, deux vecteurs directeurs d'une même droite sont colinéaires

$\overrightarrow{EM}$ et $\overrightarrow{EF}$ sont colinéaires $\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{EM};\overrightarrow{EF}) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x+3 & 7 \\ y-1 & -3 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -3(x+3) - (y-1)\times 7 = 0$

$\Leftrightarrow -3x - 7y - 9 + 7 = 0$

$\Leftrightarrow \underline{-3x - 7y - 2 = 0}$

Equation cartésienne de (EF)

2) Déterminer une équation cartésienne de la droite (d) telle que (d) // (EF) et G(6 ; - 4)∈(d)

D'après 1), une équation cartésienne de (EF) : $-3x-7y-2=0$

$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (EF)

Soit $M(x;y) \in (d)$: $\overrightarrow{GM}\begin{pmatrix} x-6 \\ y+4 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d)

or, $(EF) \parallel (d) \Leftrightarrow \overrightarrow{EF}$ et $\overrightarrow{GM}$ sont colinéaires

$\Leftrightarrow \det(\overrightarrow{GM};\overrightarrow{EF}) = 0$

$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} x-6 & 7 \\ y+4 & -3 \end{vmatrix} = 0$

$\Leftrightarrow -3(x-6) - (y+4)\times 7 = 0$

$\Leftrightarrow -3x - 7y + 18 - 28 = 0$

$\Leftrightarrow \underline{-3x - 7y - 10 = 0}$ (Equation cartésienne de (d))

Exercice 4 :

On considère un triangle non aplati ABC du plan.

On définit les points D, E et F, par les relations vectorielles suivantes :

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \qquad \overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} \qquad \text{et} \quad \overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BC}$$

1) Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$? Faire une phrase.

Comme A, B, C ne sont pas alignés, $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires

2) Exprimer $\overrightarrow{DE}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AE}$ (relation de Chasles)

$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ (car $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$)

Donc : $\overrightarrow{DE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

3) Exprimer $\overrightarrow{DF}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$

$\overrightarrow{DF} = \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$ (relation de Chasles)

$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC}$ (car $\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BC}$)

$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB} + 2(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC})$ (relation de Chasles)

$= \overrightarrow{AB} - 2\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{DF} = -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC}$

4) Que peut-on dire des points D, E et F ? Justifier.

On a : $-3\overrightarrow{DE} = -3\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}\right)$

$= -\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{DF}$

D'où : $\overrightarrow{DE}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont colinéaires avec un point commun

Donc : D, E et F sont alignés

Exercice 5 :

Soit la droite (d_1) : $9x - 2y + 4 = 0$

Déterminer une équation cartésienne de la droite (d_2) telle que $(d_2)\perp(d_1)$ et $A(-1\,;5)\in(d_2)$

$(d_1) : 9x - 2y + 4 = 0 \begin{cases} a = 9 \\ b = -2 \\ c = 4 \end{cases}$

on pose : $\vec{n}\begin{pmatrix} 9 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (d_1)

Comme $(d_1) \perp (d_2)$, $\vec{n}$ est un vecteur directeur de (d_2)

Soit $M(x;y) \in (d_2)$:

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} x+1 \\ y-5 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d_2)

or, deux vecteurs directeurs de la même droite sont colinéaires

d'où : $\vec{n}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires

$\iff \det(\overrightarrow{AM}; \vec{n}) = 0$

$\iff \begin{vmatrix} x+1 & 9 \\ y-5 & -2 \end{vmatrix} = 0$

$\iff -2(x+1) - (y-5) \times 9 = 0$

$\iff -2x - 9y - 2 + 45 = 0$

$\iff -2x - 9y + 43 = 0$ (Equation cartésienne de (d_2))