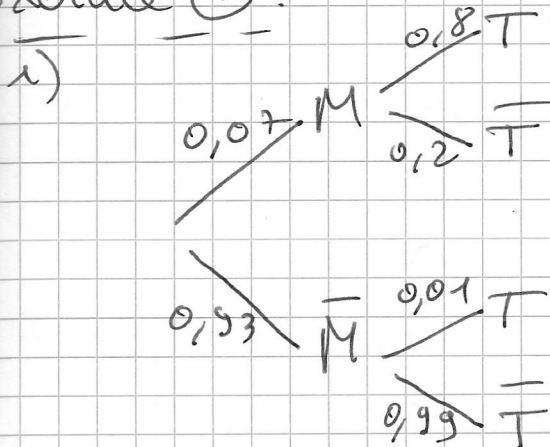


## Sujet ①

## Exercice ①:



$$\begin{aligned}
 P(M \cap T) &= P(M) \times P(T) \\
 &= 0,07 \times 0,8 \\
 &= \underline{0,056}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) P(T) &= P(T \cap M) + P(T \cap \bar{M}) \\
 &= P(M) \times P(T) + P(\bar{M}) \times P(T) \\
 &= 0,056 + 0,93 \times 0,01 \\
 &= \underline{0,0653}
 \end{aligned}$$

$$3) P_T(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,056}{0,0653} \simeq \underline{0,8576}$$

4) a) On répète dix fois de manière indépendante la même épreuve de Bernoulli.   
 Succès : la personne a un test (+) car assimilable à un tirage avec remise.   
 Echec : la personne a un test (-) remise.   
 On peut modéliser la situation à l'aide d'un schéma de Bernoulli.

X compte le nombre de personnes ayant un test positif sur les dix personnes.   
 X suit la loi binomiale de paramètres  $(10; 0,0653)$

$$b) P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$$

$$P(X=2) = \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times (1-0,0653)^{10-2} \simeq 0,1118$$

$$\begin{aligned}
 c) P(2 < X < 8) &= P(3 \leq X \leq 7) = P(X \leq 7) - P(X \leq 3-1) \\
 &= P(X \leq 7) - P(X \leq 2)
 \end{aligned}$$

A l'aide de la calculatrice, on trouve :  $\underline{\underline{P(2 < X < 8) \simeq 0,0236}}$

d)  $n$  non fixe

$$P(X \geq 1) > 0,99$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(X < 1) > 0,99$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(X = 0) > 0,99$$

$$\Leftrightarrow 1 - \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} \times \underbrace{0,0653^0}_{=1} \times (1 - 0,0653)^{n-0} > 0,99$$

$$\Leftrightarrow 1 - 0,9347^n > 0,99$$

A l'aide de la calculatrice:  $1 - 0,9347^{68} \approx 0,9899 < 0,99$

$$\text{et } 1 - 0,9347^{69} \approx 0,9905 > 0,99$$

D'où: il faut tester au minimum 69 personnes

Exercice (2):

$$1) a) \quad C(1; 1; 0) \quad F(1; 0; 1) \quad G(1; 1; 1)$$

$$I(0; \frac{1}{2}; 1)$$

$$b) \quad \vec{CF} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \vec{CI} \begin{pmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$x_{\vec{CF}} = 0, \text{ or } x_{\vec{CI}} = -1 \neq 0, \text{ d'où il n'existe pas de réel } k \text{ tel que } \vec{CI} = k \vec{CF}$$

D'où:  $\vec{CF}$  et  $\vec{CI}$  ne sont pas colinéaires

$$\vec{n} \cdot \vec{CF} = 1 \times 0 + 2 \times (-1) + 2 \times 1 = -2 + 2 = 0$$

$$\vec{n} \cdot \vec{CI} = 1 \times (-1) + 2 \times (-\frac{1}{2}) + 2 \times 1 = -2 + 2 = 0$$

$\vec{n}$  est donc orthogonal à deux vecteurs non-colinéaires du plan (CFI)

Donc  $\vec{n}$  est un vecteur normal au plan (CFI)

$$c) \text{ Soit } M(x; y; z) \in (CFI)$$

$$\vec{CM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z \end{pmatrix} \perp \vec{n}, \text{ (car } \vec{n} \text{ vecteur normal à (CFI))}$$

$$\Leftrightarrow \vec{CM} \cdot \vec{n} = 0 \Leftrightarrow 1 \times (x-1) + 2 \times (y-1) + 2 \times z = 0$$

$$\Leftrightarrow x-1+2y-2+2z=0 \quad (3)$$

$$\Leftrightarrow \underline{x+2y+2z-3=0} \text{ est une équation cartésienne du plan (CFI)}$$

2) (d)  $\perp$  (CFI) avec  $G \in (d)$

a) Soit  $M(x; y; z) \in (d)$ :

$$\vec{GM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z-1 \end{pmatrix} \text{ vecteur directeur de (d)}$$

D'autre part:  $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$  est aussi un vecteur directeur de (d)

Deux vecteurs directeurs de la même droite sont colinéaires.

$$\vec{GM} = k\vec{n}, \quad k \in \mathbb{R}.$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = k \\ y-1 = 2k \\ z-1 = 2k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+k \\ y = 1+2k \\ z = 1+2k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$$

est une représentation paramétrique de la droite (d)

b) Comme (d)  $\perp$  (CFI), le projeté orthogonal K de G sur (CFI) est le point d'intersection de (d) avec (CFI)

$$\begin{cases} x = 1+k \\ y = 1+2k \\ z = 1+2k \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}, \text{ d'où: } \begin{aligned} &1+k+2(1+2k)+2(1+2k)-3=0 \\ \Leftrightarrow &9k = -2 \\ \Leftrightarrow &k = -\frac{2}{9} \end{aligned}$$

$$\text{D'où: } \begin{cases} x = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9} \\ y = 1 + 2 \times (-\frac{2}{9}) = \frac{5}{9} \\ z = 1 + 2 \times (-\frac{2}{9}) = \frac{5}{9} \end{cases}, \text{ donc } K(\frac{7}{9}; \frac{5}{9}; \frac{5}{9})$$

c) La distance de G à (CFI) est égale à GK

$$\begin{aligned} GK &= \sqrt{(x_K - x_G)^2 + (y_K - y_G)^2 + (z_K - z_G)^2} \\ &= \sqrt{(\frac{7}{9} - 1)^2 + (\frac{5}{9} - 1)^2 + (\frac{5}{9} - 1)^2} = \sqrt{(-\frac{2}{9})^2 + (-\frac{4}{9})^2 + (-\frac{4}{9})^2} \end{aligned}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{81} + \frac{16}{81} + \frac{16}{81}} = \sqrt{\frac{36}{81}}$$

(4)

$$= \frac{6}{9} = \frac{2 \times 3}{3 \times 3} = \frac{2}{3}$$

3) a) Le triangle GCF:

$$\begin{aligned} \text{Aire}(GCF) &= \frac{1}{2} \times \text{Aire}(\text{carré } BCFG) \\ &= \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \underline{\text{Volume}(GCFI)} &= \frac{1}{3} \times \text{Aire}(GCF) \times GH \\ &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{6} \text{ en unité de volume} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{On a } \text{Volume}(GCFI) &= \frac{1}{3} \times \text{Aire}(CFI) \times GK \\ &= \frac{1}{3} \times \text{Aire}(CFI) \times \frac{2}{3} \end{aligned}$$

D'après a):  $\frac{1}{6} = \frac{1}{3} \times \text{Aire}(CFI) \times \frac{2}{3}$

$$\text{c) } \underline{\text{Aire}(CFI)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{2}{9}} = \frac{1}{6} \times \frac{9}{2} = \frac{3 \times 3}{2 \times 2} = \frac{3}{4}$$

Exercice (3):

$$1) u_1 = \frac{3}{4}u_0 + \frac{1}{4} \times 0 + 1 = \frac{3}{4} \times 1 + 1 = \frac{7}{4}$$

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{3}{4}u_1 + \frac{1}{4} \times 1 + 1 = \frac{3}{4} \times \frac{7}{4} + \frac{1}{4} + \frac{4}{4} \\ &= \frac{21}{16} + \frac{5 \times 4}{4 \times 4} = \frac{41}{16} \end{aligned}$$

2)  $(u_n)$  semble être une suite croissante

3) ⊢ (I):  $0 \leq u_0 = 1 \leq 0+1$  La prop. est initialisée

\* Hérédité: On suppose la propriété vraie pour un certain  $k \in \mathbb{N}$

(c'est-à-dire:  $k \leq u_k \leq k+1$ )

Montrons alors qu'elle est vraie au rang  $k+1$ :

On sait que :

$$k \leq u_k \leq k+1$$

$$\frac{3}{4}k \leq \frac{3}{4}u_k \leq \frac{3}{4}k + \frac{3}{4}$$

$$k \leq \frac{3}{4}u_k + \frac{1}{4}k \leq k + \frac{3}{4}$$

$$k+1 \leq \underbrace{\frac{3}{4}u_k + \frac{1}{4}k + 1}_{u_{k+1}} \leq k + \frac{7}{4} \leq k+2$$

La prop est héréditaire

\* Conclusion: La prop est initialisée et héréditaire -

Elle est donc vraie pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} 4) u_{n+1} - u_n &= \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 - u_n \\ &= -\frac{1}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} n &\leq u_n \leq n+1 \\ -\frac{1}{4}(n+1) &\leq -\frac{1}{4}u_n \leq -\frac{1}{4}n \\ -\frac{1}{4} &\leq -\frac{1}{4}u_n + \frac{1}{4}n \leq 0 \end{aligned}$$

$$\frac{3}{4} \leq \underbrace{-\frac{1}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1}_{u_{n+1} - u_n} \leq 1$$

d'où  $u_{n+1} - u_n \geq 0$ , pour tout  $n \in \mathbb{N}$   
d'où ( $u_n$ ) suite croissante

$$5) a) n \leq u_n \leq n+1, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}^*$$

$$\frac{n}{n^2} \leq \frac{u_n}{n^2} \leq \frac{n+1}{n^2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{n} \leq \frac{u_n}{n^2} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}$$

$$b) \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} = 0 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n^2}, \text{ d'où } \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} = 0$$

Théorème d'encadrement:  $\frac{u_n}{n^2}$  est convergente et  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n^2} = 0$

$$b) v_n = u_n - n$$

$$\begin{aligned}
 a) \quad v_{n+1} &= u_{n+1} - (n+1) \\
 &= \frac{3}{4}u_n + \frac{1}{4}n + 1 - n - 1 \\
 &= \frac{3}{4}u_n - \frac{3}{4}n = \frac{3}{4}(u_n - n)
 \end{aligned}$$

d'où :

$$v_{n+1} = \frac{3}{4}v_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

c'est-à-dire :  $(v_n)$  est géométrique de raison  $\frac{3}{4}$  et de premier terme  $v_0 = u_0 - 0 = 1$

$$\begin{aligned}
 b) \quad S_n &= v_0 + v_1 + v_2 + \dots + v_n \\
 &= v_0 \times \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} \quad (\text{car } (v_n) \text{ géométrique}) \\
 &= \frac{1 - (\frac{3}{4})^{n+1}}{1 - \frac{3}{4}}
 \end{aligned}$$

$$S_n = \frac{1 - (\frac{3}{4})^{n+1}}{\frac{1}{4}} = 4(1 - (\frac{3}{4})^{n+1}), \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$$

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{3}{4})^{n+1} = 0, \text{ car } -1 < \frac{3}{4} < 1$$

d'où par somme  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - (\frac{3}{4})^{n+1} = 1$

Par produit :  $\lim_{n \rightarrow +\infty} 4(1 - (\frac{3}{4})^{n+1}) = 4$

7) a) Soit  $n \in \mathbb{N}$  :

$$v_n = u_n - n$$

$$\text{or, } v_n = v_0 \times (\frac{3}{4})^n = (\frac{3}{4})^n$$

d'où :  $u_n = (\frac{3}{4})^n + n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}$

b) Soit  $n \in \mathbb{N}$  :

$$T_n = u_0 + u_1 + \dots + u_n$$

$T = 1$   
 for R in range(1, 21):  
 $T = T + (\frac{3}{4})^R + R$   
 print(T)

## Exercice (4):

Partie (A):

(7)

1)  $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$

2)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$

$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = +\infty$ ,  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$

3) Asymptote horizontale:

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$  : la droite d'eq  $y = 1$  est asymptote horizontale  $\bar{a}(f)$  en  $-\infty$ .

comme:  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ , la même droite est aussi asymptote horizontale  $\bar{a}(f)$  en  $+\infty$ .

Asymptotes verticales:

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \pm \infty$  : la droite d'équation  $x = -1$  est asymptote verticale  $\bar{a}(f)$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \pm \infty$  : la droite d'eq  $x = 0$  (l'axe des ordonnées) est asymptote verticale  $\bar{a}(f)$

4) voir ci-dessus.

Partie (B):

1)  $f(x)$  est définie si et seulement si:  $x^2 + x \neq 0$   
 $x^2 + x = x(x+1) = 0$ .

$\Leftrightarrow x = 0$  ou  $x = -1$ , d'où  $\mathcal{D} = \mathbb{R} \setminus \{0; -1\}$

2) a) en  $-\infty$ :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$  et  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$ . Par somme, on a une f.c. du type " $\infty - \infty$ ".

$$\frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + x} = \frac{x^2(1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2})}{x^2(1 + \frac{1}{x})} \quad \text{Or, } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{2}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$$

Par somme, puis par produit:  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$

b) en -1:

$$x^2 - 2x + 1 = 1 + 2 - 1 = 2 > 0$$

$$x^2 + x = x(x+1)$$

Signe de  $x(x+1)$ :

| $x$               | $-\infty$ | $-1$ | $0$ | $+\infty$ |
|-------------------|-----------|------|-----|-----------|
| signe de $x$      |           | -    | 0   | +         |
| signe de $x+1$    | -         | 0    | +   | +         |
| signe de $x(x+1)$ | +         | 0    | -   | +         |

D'au:  $\lim_{x \rightarrow -1^-} x^2 + x = 0^+$

Par quotient:  $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = +\infty$

De même:

$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = -\infty$

3) I.G.

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1 \Leftrightarrow$  la droite d'équation  $y = 1$  est asymptote horizontale à  $(\mathcal{C}_f)$  en  $-\infty$ .

$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \pm \infty \Leftrightarrow$  la droite d'équation  $x = -1$  est asymptote verticale à  $(\mathcal{C}_f)$ .

4)  $f(x) - 1 = \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + x} - \frac{x^2 + x}{x^2 + x}$

$= \frac{x^2 - 2x + 1 - x^2 - x}{x^2 + x} = \frac{-3x + 1}{x^2 + x}$

$-3x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \leq \frac{1}{3}$

$x^2 + x \geq 0$  pour  $x \in ]-\infty; -1]$

Tableau de signes:

| $x$               | $-\infty$ | $-1$ |
|-------------------|-----------|------|
| signe de $-3x+1$  |           | +    |
| signe de $x^2+x$  |           | +    |
| signe de $f(x)-1$ |           | +    |

d'au sur  $]-\infty; -1]$ ,

$f(x) - 1 > 0$

c'est-à-dire:

$(\mathcal{C}_f)$  est située strictement au-dessus de (d) sur  $]-\infty; -1]$

5) a)  $f$  est dérivable partout car elle est continue (car c'est un quotient) (9)

$f$  est donc dérivable sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$

On pose:  $u(x) = x^2 - 2x + 1$

$v(x) = x^2 + x$

$u'(x) = 2x - 2$

$v'(x) = 2x + 1$

$\alpha = \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$ , d'où:  $f'(x) = \frac{(2x-2)(x^2+x) - (2x+1)(x^2-2x+1)}{(x^2+x)^2}$

$= \frac{2x^3 + 2x^2 - 2x^2 - 2x - (2x^3 - 4x^2 + 2x + x^2 - 2x + 1)}{(x^2+x)^2}$

$= \frac{2x^3 - 2x - 2x^3 + 3x^2 - 1}{(x^2+x)^2}$

donc:  $f'(x) = \frac{3x^2 - 2x - 1}{(x^2+x)^2}$

b) Sur  $\mathbb{R} \setminus \{-1; 0\}$ :

$(x^2+x)^2 > 0$ , pour tout  $x \in \mathbb{D}$ .

$\Delta = b^2 - 4ac = 4 - 4 \times 3 \times (-1) = 4 + 12 = 16 > 0$ .

Le trinôme admet 2 racines réelles distinctes:

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + 4}{6} = 1$

$x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - 4}{6} = -\frac{1}{3}$

Le trinôme est du signe de  $a$  à l'extérieur de ses racines.

Or,  $a = 3 > 0$

| $x$              | $-\infty$ | $-1$ | $-\frac{1}{3}$ | $0$ | $1$ | $+\infty$ |
|------------------|-----------|------|----------------|-----|-----|-----------|
| Signe de $f'(x)$ | +         |      | +              | 0   | -   | +         |

c) D'après b) :

| $x$              | $-\infty$  | $-1$      | $-\frac{1}{3}$ | $0$       | $1$        | $+\infty$ |
|------------------|------------|-----------|----------------|-----------|------------|-----------|
| signe de $f'(x)$ | +          |           | +              | 0         | -          | +         |
| Variation de $f$ | $\nearrow$ | $+\infty$ | $\nearrow$     | $-\infty$ | $\searrow$ | $+\infty$ |

$$6) f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 2x + 1}{x^2 + x} = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow x-1=0$$

$$\Leftrightarrow x=1$$

Il y a un seul point d'intersection entre  $(C_f)$  et l'axe des abscisses de coordonnées :

$$(1; 0)$$