Spé Maths Terminale (M Mangeard)	**Corrigé du devoir de mathématiques :** *Loi binomiale*	Fait le lundi 05 décembre 2022

Exercice 1 : Utilisation de la calculatrice

On considère une variable aléatoire réelle X qui suit une loi binomiale de paramètres (36 ;0,42)

1) Déterminer P(X = 15) à 10^{-4} près après avoir écrit la formule.

$P(X=k) = \binom{n}{k} \times p^{k} \times (1-p)^{n-k}$

d'où : $P(X=15) = \binom{36}{15} \times 0{,}42^{15} \times 0{,}58^{36-15} \simeq 0{,}1338$
à la calculatrice

2) Calculer $P(X \leq 20)$ à 10^{-4} près

A la calculatrice : $P(X \leq 20) \simeq 0{,}9645$

3) Calculer $P(X \geq 10)$ à 10^{-4} près en détaillant

$P(X \geq 10) = 1 - P(X < 10)$ (en passant par l'événement contraire)
$= 1 - P(X \leq 9)$
$\simeq 0{,}9736$ (à la calculatrice)

4) Calculer $P(12 \leq X \leq 30)$ à 10^{-4} près en détaillant

$P(12 \leq X \leq 30) = P(X \leq 30) - P(X \leq 12-1)$
$= P(X \leq 30) - P(X \leq 11)$
$\simeq 0{,}8904$

5) Compléter le tableau partiel de probabilités cumulées suivant (valeurs arrondies à 10^{-4} près) :

k	**P(X≤k)**
8	0,0108
10	0,0571
19	0,9296
20	0,9645
21	0,9838
22	0,9933

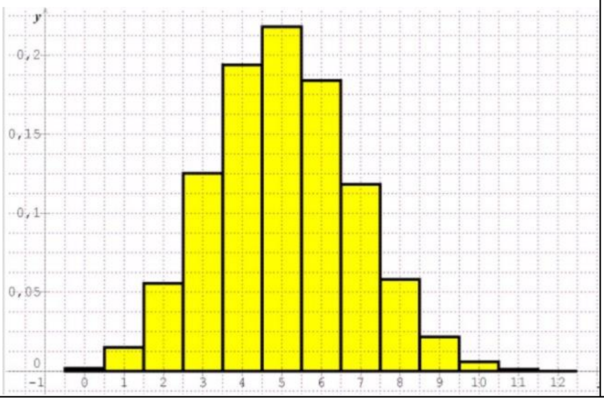
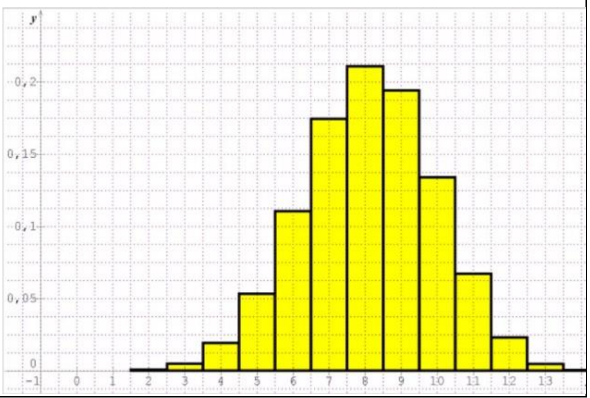
En déduire, en justifiant, la valeur du plus petit entier k tel que :

$$P(X \leq k) > 0{,}975$$

$P(X \leq 20) \simeq 0{,}9645 \leq 0{,}975$
et $P(X \leq 21) \simeq 0{,}9838 > 0{,}975$, donc $k = 21$ est le plus petit entier naturel k tel que $P(X \leq k) > 0{,}975$

Exercice 2 :

Voici les diagrammes en barres de deux variables X et Y qui suivent chacune une loi binomiale de paramètres respectifs (14;p) et (14;p') :

Diagramme 1	Diagramme 2
	

On sait que E(X) = 8 et E(Y) = 5

1) Attribuer à chaque variable le diagramme correspondant en justifiant :

Diagramme…2…. pour la variable X

Diagramme…1…. pour la variable Y

Justification :

Le diagramme en barres pour chaque variable doit être approximativement centré sur l'espérance mathématique de la variable considérée.

2) En déduire le calcul de p et p' Comme X suit $\mathcal{B}(14 ; p)$, $E(X) = 14 \times p$

$E(X) = 14 \times p = 8 \iff p = \frac{8}{14} = \frac{4}{7}$

De même, $E(Y) = 14 \times p' = 5 \iff p' = \frac{5}{14}$

3) Comparer σ(X) et σ(Y) en justifiant :

$\sigma(X) = \sqrt{14 \times p \times (1-p)} = \sqrt{14 \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{7}} = \sqrt{\frac{2 \times 4 \times 3}{7}} = \sqrt{\frac{24}{7}} \simeq 1,85$

$\sigma(Y) = \sqrt{14 \times p' \times (1-p')} = \sqrt{\cancel{14} \times \frac{5}{\cancel{14}} \times \frac{9}{14}} = \sqrt{\frac{5 \times 9}{14}} = \sqrt{\frac{45}{14}} \simeq 1,79$

D'où : $\sigma(X) > \sigma(Y)$

Exercice 3 :

Vingt personnes souhaitent être candidats à un emploi de cadre dans une entreprise.

Leurs candidatures sont étudiées par le cabinet de recrutement indépendamment les unes des autres.

On admet que la probabilité qu'un candidat soit recruté dans ce cas est de 0,39.

On note X la variable aléatoire donnant le nombre de candidats recrutés parmi les vingt.

1) Justifier que X suit une loi binomiale dont on précisera les paramètres.

On répète vingt fois, de manière indépendante, la même épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0,39$

→ Succès : le candidat est recruté

→ Échec : le candidat n'est pas recruté.

La situation peut donc être modélisée par un schéma de Bernoulli de paramètres $\begin{cases} n = 20 \\ p = 0,39 \end{cases}$

X est la variable aléatoire qui compte les succès (= le nombre de candidats recrutés à l'issue des vingt entretiens)

D'où : X suit une loi binomiale de paramètres $\begin{cases} n = 20 \\ p = 0,39 \end{cases}$

(X suit $\mathcal{B}(20 ; 0,39)$)

2) Calculer la probabilité à 10^{-3} près qu'exactement 50% des candidats soient recrutés.

$k = \frac{1}{2} \times 20 = 10$

$P(X = 10) = \binom{20}{10} \times 0,39^{10} \times (1 - 0,39)^{20-10}$

$\simeq 0,107$ (à la calculatrice)

3) Calculer la probabilité qu'au moins le quart des candidats soient recrutés

$P(X \geqslant 5) = 1 - P(X < 5) = 1 - P(X \leq 4)$

$\simeq 0,939$ (à la calculatrice)

4) Combien faudrait-il convoquer de candidats au départ au minimum pour être sûr que la probabilité de pourvoir en recruter au moins un soit strictement supérieure à 0,95 ?

On cherche le plus petit n possible, tel que :

$P(X \geqslant 1) > 0,95$

$\Leftrightarrow \quad 1 - P(X < 1) > 0,95$

$\Leftrightarrow \quad 1 - P(X = 0) > 0,95$

$\Leftrightarrow \quad 1 - \underbrace{\binom{n}{0}}_{=1} \times \underbrace{0,39^0}_{=1} \times 0,61^{n-0} > 0,95$

$\Leftrightarrow \quad 1 - 0,61^n > 0,95$

A l'aide d'un tableau de valeurs à la calculatrice, on a :

Pour $n = 6$, $1 - 0,61^n \simeq 0,948 < 0,95$

Pour $n = 7$, $1 - 0,61^n \simeq 0,969 > 0,95$

Il faut donc convoquer au minimum 7 candidats