Spé Terminale (M Mangeard)	**Corrigé du devoir de géométrie dans l'espace (chapitre 1)**	Fait le lundi 07 novembre 2022

Exercice 1 :

On considère les points suivants dans un repère de l'espace :

A(-3 ;5 ;8) et B(7 ;2 ;-1)

1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (AB) en justifiant

On a $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}10\\-3\\-9\end{pmatrix}$

Soit $M(x;y;z) \in (AB)$:

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x+3\\y-5\\z-8\end{pmatrix}$ vecteur directeur de $\overrightarrow{AB}$

alors : $\overrightarrow{AM} = t\overrightarrow{AB}$, $t \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+3 = 10t \\ y-5 = -3t \\ z-8 = -9t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -3+10t \\ y = 5-3t \\ z = 8-9t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

c'est une représentation paramétrique de la droite (AB)

2) Soit la droite (d) dont une représentation paramétrique est donnée par :

$$\begin{cases} x = 1 - \frac{10}{3}k \\ y = -2 + k \\ z = 5 + 3k \end{cases}, \ k \in \mathbb{R}$$

Montrer que : (AB) // (d) en justifiant.

D'après la représentation paramétrique donnée de la droite (d),

$\vec{u}\begin{pmatrix}-\frac{10}{3}\\1\\3\end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d)

Soit $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}10\\-3\\-9\end{pmatrix}$ vecteur directeur de (AB)

on a : $-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-\frac{1}{3}\times 10\\-\frac{1}{3}\times(-3)\\-\frac{1}{3}\times(-9)\end{pmatrix}$

d'où : $-\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-\frac{10}{3}\\1\\3\end{pmatrix} = \vec{u}$

D'où $\vec{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires

Donc : (d) // (AB)

Exercice 2 :

Les trois vecteurs suivants peuvent-ils constituer une base de l'espace ? Justifier soigneusement.

$$\vec{u}\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix},\ \vec{v}\begin{pmatrix}-5\\4\\2\end{pmatrix} \text{ et } \vec{w}\begin{pmatrix}17\\-8\\-12\end{pmatrix}$$

Tout d'abord : $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires

(En effet : $-5 \times x_{\vec{u}} = -5\times 1 = -5 = x_{\vec{v}}$

mais : $-5 \times y_{\vec{u}} = -5\times 2 = -10 \neq 4 = y_{\vec{v}}$)

On suppose qu'il existe $(a;b) \in \mathbb{R}^2$, tel que :

$$\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}17\\-8\\-12\end{pmatrix} = a\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix} + b\begin{pmatrix}-5\\4\\2\end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}17 = a - 5b\\ -8 = 2a + 4b\\ -12 = -3a + 2b\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a - 5b = 17 & L_1 \leftarrow 2L_1 - L_2\\ 2a + 4b = -8 & (\div 2)\\ -3a + 2b = -12\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-14b = 42\\ a + 2b = -4\\ -3a + 2b = -12\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}b = \frac{42}{-14} = -3\\ a = -2\times(-3) - 4 = 6 - 4 = 2\\ -3\times 2 + 2\times(-3) = -6 + (-6) = -12 \text{ (c'est cohérent)}\end{cases}$$

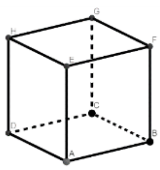
D'où : $\vec{w} = 2\vec{u} - 3\vec{v}$ et comme $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires,

alors : $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ sont coplanaires

Par conséquent : Ils ne peuvent pas constituer une base de l'espace

Exercice 3 :

Soit le cube ABCDEFG suivant :



On se place dans le repère $(A\,;\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE})$

On a : P est le milieu de [CD] et on définit le point M par la relation : $\overrightarrow{DM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DH}$

1) Donner les coordonnées des points G, H et P dans le repère (sans justification)

$G(1;1;1)$, $H(0;1;1)$, $P(\frac{1}{2};1;0)$

2) a) Montrer soigneusement que $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$

On sait que : $\overrightarrow{DM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DH}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DH}$ (relation de Chasles)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DH}$

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$ (car $\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE}$)

b) En déduire les coordonnées de M dans le repère.

D'après la relation établie dans la question 2a),

$\overrightarrow{AM} = 0\,\overrightarrow{AB} + 1\,\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AE}$

Donc : $M\left(0\,;1\,;\frac{2}{3}\right)$

3) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (MP)

$M\left(0\,;1\,;\frac{2}{3}\right)$ $P\left(\frac{1}{2}\,;1\,;0\right)$

$\overrightarrow{MP}\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\0\\-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

Soit $R(x\,;y\,;z) \in (MP)$:

$\overrightarrow{MR}\begin{pmatrix}x\\y-1\\z-\frac{2}{3}\end{pmatrix}$

or, $\overrightarrow{MR} = t\overrightarrow{MP}$, $t \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}t \\ y-1 = 0 \\ z-\frac{2}{3} = -\frac{2}{3}t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}t \\ y = 1 \\ z = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$

c'est une représentation paramétrique de la droite (MP)

4) Montrer que (MP) et (GH) sont coplanaires (le plus simplement possible)

Les points M, P, G et H sont tous situés dans le plan (DCG) (qui contient la face arrière du cube)

D'où : (MP) et (GH) sont coplanaires

5) Calculer les coordonnées du point N, point d'intersection des droites (MP) et (GH)

$\overrightarrow{GH}\begin{pmatrix}-1\\0\\0\end{pmatrix}$

Soit $S(x\,;y\,;z) \in (GH)$

$\overrightarrow{GS}\begin{pmatrix}x-1\\y-1\\z-1\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{GS} = k\overrightarrow{GH}$, $k \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = -k \\ y-1 = 0 \\ z-1 = 0 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1-k \\ y = 1 \\ z = 1 \end{cases}, \quad k \in \mathbb{R}$$ (représentation paramétrique de (GH))

Soit $\{N\} = (MP) \cap (GH)$

Alors :

$$\begin{cases} 1-k = \frac{1}{2}t \\ 1 = 1 \\ 1 = \frac{2}{3} - \frac{2}{3}t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 - \frac{1}{2}t \\ \frac{1}{3} = -\frac{2}{3}t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} k = 1 - \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{5}{4} \\ t = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

d'où : $N\left(1 - \frac{5}{4} \,;\, 1 \,;\, 1\right)$

c'est-à-dire : $\underline{N\left(-\frac{1}{4} \,;\, 1 \,;\, 1\right)}$ (c'est cohérent avec la figure)