Spé Maths Terminale (M Mangeard)	**Corrigé du devoir de mathématiques :** Géométrie dans l'espace 2	Fait le lundi 16 janvier 2023

Exercice 1 :

Soient les points A(0 ;-1 ;-2), B(1 ;2 ;5) et C(-1 ;3 ;12) dans un repère orthonormé de l'espace.

1) Montrer soigneusement que ces trois points définissent un plan de l'espace

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}1\\3\\7\end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}-1\\4\\14\end{pmatrix}$

$-1\times x_{\overrightarrow{AB}} = -1\times 1 = -1 = x_{\overrightarrow{AC}}$

or, $-1\times y_{\overrightarrow{AB}} = -1\times 3 = -3 \neq 4 = y_{\overrightarrow{AC}}$

d'où : il n'existe pas de réel k, tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

d'où : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires

c'est-à-dire : A, B et C non alignés

donc : ils définissent un plan de l'espace

2) Montrer que le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

$\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs directeurs du plan (ABC) (car ils ne sont pas colinéaires)

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AB} = 2\times 1 - 3\times 3 + 1\times 7 = 2 - 9 + 7 = 0 \iff \vec{n}\perp\overrightarrow{AB}$

$\vec{n}\cdot\overrightarrow{AC} = 2\times(-1) - 3\times 4 + 14\times 1 = -2 - 12 + 14 = 0 \iff \vec{n}\perp\overrightarrow{AC}$

comme $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs directeurs du plan (ABC)

alors $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

3) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC)

$\vec{n}\begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}$ vecteur normal au plan (ABC)

Soit $M(x;y;z) \in (ABC)$:

$\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix}x\\y+1\\z+2\end{pmatrix}$ or, $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur de (ABC)

$\overrightarrow{AM}\perp\vec{n}$

$\iff \overrightarrow{AM}\cdot\vec{n} = 0$

$\iff 2x - 3(y+1) + 1\times(z+2) = 0$

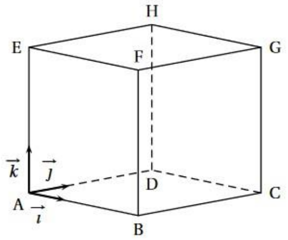
$\iff 2x - 3y + z - 1 = 0$

c'est une équation cartésienne du plan (ABC)

Exercice 2 :

Soit le cube ABCDEFGH suivant d'arête 1.

On se place dans le repère orthonormé (A ;$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AE}$)



1) Soient K et R, deux points définis par : $\overrightarrow{DK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DG}$ et R est le milieu de [BC]

a) Déterminer les coordonnées des points K et R dans le repère (sans justifier)

$K\left(\frac{1}{2} ; 1 ; \frac{1}{2}\right)$ $R\left(1 ; \frac{1}{2} ; 0\right)$

b) En déduire une représentation paramétrique de la droite (KR)

$\overrightarrow{KR}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de la droite (KR)

soit $M(x;y;z) \in (KR)$, $\overrightarrow{KM}\begin{pmatrix} x-\frac{1}{2} \\ y-1 \\ z-\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (KR)

Deux vecteurs directeurs de la même droite sont colinéaires

D'où : $\overrightarrow{KM} = t\overrightarrow{KR}$, $t \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}t \\ y - 1 = -\frac{1}{2}t, \ t \in \mathbb{R} \\ z - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ y = 1 - \frac{1}{2}t, \ t \in \mathbb{R} \\ z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \end{cases}$$

c'est une représentation paramétrique de la droite (KR)

2) On admet que le plan (ECG) a pour équation cartésienne x – y = 0

Calculer les coordonnées du point d'intersection entre (ECG) et (RK)

$$\begin{cases} x - y = 0 \\ x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}t \\ y = 1 - \frac{1}{2}t, \ t \in \mathbb{R} \\ z = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}t \end{cases}$$

d'où : $\frac{1}{2} + \frac{1}{2}t - \left(1 - \frac{1}{2}t\right) = 0$

$\Leftrightarrow t = \frac{1}{2}$

d'où : $\begin{cases} x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{2}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\ y = 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4} \\ z = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \end{cases}$

Le point d'intersection entre (ECG) et (RK) a pour coordonnées $\left(\frac{3}{4} ; \frac{3}{4} ; \frac{1}{4}\right)$

Exercice 3 :

On considère l'ensemble (E) des points M de l'espace suivant :

$$(E) = \{M(x\,;y\,;z), \text{ tels que : } x^2 + y^2 + z^2 - 4x - y + 2z + \frac{13}{4} = 0\}$$

Montrer que (E) est une sphère dont on donnera les éléments caractéristiques.

$$x^2+y^2+z^2-4x-y+2z+\frac{13}{4}=0$$

$$\Leftrightarrow x^2-4x+y^2-y+z^2+2z+\frac{13}{4}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2-4+(y-\frac{1}{2})^2-\frac{1}{4}+(z+1)^2-1+\frac{13}{4}=0$$

$$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-\frac{1}{2})^2+(z+1)^2=4+\frac{1}{4}+1-\frac{13}{4}$$

$$=\frac{16}{4}+\frac{1}{4}+\frac{4}{4}-\frac{13}{4}=2$$

Donc (E) est la sphère de centre $\Omega(2\,;\frac{1}{2}\,;-1)$ et de rayon $R=\sqrt{2}$