

Spé Maths Terminale (M Mangeard)	<u>Corrigé du DM de géométrie</u> <u>dans l'espace</u>	Rendu le vendredi 13 janvier 2023
--	---	---

On considère les points suivants dans un repère orthonormé de l'espace :

A(-4 ; 0, 1), B(3 ; 3 ; -1), C(1 ; 5 ; 1) et D(0 ; 2 ; 6)

1) Les points A, B et C sont-ils alignés ? Justifier soigneusement.

$$\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}, \text{ d'où } \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$z_{\overrightarrow{AC}} = 0 \text{ et } z_{\overrightarrow{AB}} = -2 \neq 0$$

d'où : il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{AC} = k\overrightarrow{AB}$

c'est-à-dire $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires, donc A, B et C ne sont pas alignés

2) a) Montrer que le triangle ABC est rectangle en C

$$\overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}, \text{ d'où : } \overrightarrow{CA} \cdot \overrightarrow{CB} = -5 \times 2 - 5 \times (-2) + 0 \times (-2) = -10 + 10 = 0$$

$$\text{D'où : } \overrightarrow{CA} \perp \overrightarrow{CB}$$

Autrement dit : Le triangle ABC est rectangle en C

b) En déduire le calcul de son aire

$$\begin{aligned} \text{Aire}(ABC) &= \frac{CA \times CB}{2} = \frac{\|\overrightarrow{CA}\| \times \|\overrightarrow{CB}\|}{2} \\ &= \frac{\sqrt{(-5)^2 + (-5)^2 + 0^2} \times \sqrt{2^2 + (-2)^2 + (-2)^2}}{2} \\ &= \frac{5 \times 2\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{50} \times \sqrt{12}}{2} = \frac{\sqrt{2 \times 25 \times 3 \times 4}}{2} \\ &= 5\sqrt{6} \end{aligned}$$

3) Soit $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ b \\ c \end{pmatrix}$, un vecteur de l'espace, où b et c sont deux réels

a) Calculer b et c pour que $\vec{n}$ soit un vecteur normal au plan (ABC)

$\overrightarrow{CA}$ et $\overrightarrow{CB}$ sont deux vecteurs non colinéaires du plan (ABC)

$$\overrightarrow{CA} \begin{pmatrix} -5 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{CB} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{CA} = 1 \times (-5) + b \times (-5) + c \times 0 = 0$$

$$\Leftrightarrow -5b = 5 \Leftrightarrow \underline{b = -1}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{CB} = 1 \times 2 + b \times (-2) + c \times (-2) = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 + 2 = 2c$$

$$\Leftrightarrow c = \frac{4}{2} = 2$$

Donc $\vec{n}$ a pour coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

b) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC)

$\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

Soit $M(x; y; z) \in (ABC)$,
 $\vec{AM} \begin{pmatrix} x+4 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}$, $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur du plan (ABC)
 d'où: $\vec{AM} \perp \vec{n} \Leftrightarrow \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$

$$\Leftrightarrow 1 \times (x+4) - 1 \times y + 2 \times (z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - y + 2z + 4 - 2 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{x - y + 2z + 2 = 0}$$

est une équation cartésienne du plan (ABC)

c) Le point D appartient-il au plan (ABC) ? Justifier.

$$\hookrightarrow (0; 2; 6) : x_D - y_D + 2z_D + 2 = 0 - 2 + 2 \times 6 + 2$$

$$= 12 \neq 0$$

donc $D \notin (ABC)$

4) On considère la droite (d) orthogonale au plan (ABC) et passant par D

a) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (d)

(d) est orthogonale au plan (ABC) et $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

d'où: $\vec{n}$ est un vecteur directeur de la droite (d)

Soit $M(x; y; z) \in (d)$, $\vec{DM} \begin{pmatrix} x \\ y-2 \\ z-6 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (d)

Comme $\vec{DM}$ et $\vec{n}$ sont deux vecteurs directeurs de la même droite, ils sont colinéaires

D'où: $\vec{DM} = t\vec{m}$, avec $t \in \mathbb{R}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y - 2 = -t, t \in \mathbb{R} \\ z - 6 = 2t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = t \\ y = 2 - t, t \in \mathbb{R} \\ z = 6 + 2t \end{cases}$$

c'est une représentation paramétrique de la droite (d)

b) Calculer les coordonnées du point H, projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC)

On a $\{H\} = (ABC) \cap (d)$

or, (ABC): $x - y + 2z + 2 = 0$ et (d): $\begin{cases} x = t \\ y = 2 - t, t \in \mathbb{R} \\ z = 6 + 2t \end{cases}$

d'où: $t - (2 - t) + 2(6 + 2t) + 2 = 0$
 $\Leftrightarrow 6t = -12 \Leftrightarrow t = -\frac{12}{6} = -2$

Donc: $\begin{cases} x = -2 \\ y = 2 - (-2) = 4 \\ z = 6 + 2 \times (-2) = 2 \end{cases}$, donc H a pour coordonnées $(-2; 4; 2)$

5) a) Calculer, en valeur exacte, la distance DH

$$\begin{aligned} DH &= \sqrt{(x_H - x_D)^2 + (y_H - y_D)^2 + (z_H - z_D)^2} \\ &= \sqrt{(-2 - 0)^2 + (4 - 2)^2 + (2 - 6)^2} \\ &= \sqrt{4 + 4 + 16} = \sqrt{24} = \underline{2\sqrt{6}} \end{aligned}$$

c) En déduire la valeur exacte du volume du tétraèdre ABCD

$$\begin{aligned} V(ABCD) &= \frac{1}{3} \times \text{Aire}(ABC) \times DH \\ &= \frac{1}{3} \times 5\sqrt{6} \times 2\sqrt{6} \\ &= \frac{10 \times 3 \times 2}{3} = \underline{20} \end{aligned}$$

6) Calculer, au degré près, la mesure de l'angle $\widehat{ADB}$

$$\vec{DA} \cdot \vec{DB} = DA \times DB \times \cos(\widehat{ADB})$$

$$\vec{DA} \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \vec{DB} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où } DA &= \sqrt{x_{\vec{DA}}^2 + y_{\vec{DA}}^2 + z_{\vec{DA}}^2} = \sqrt{(-4)^2 + (-2)^2 + (-5)^2} = \sqrt{16 + 4 + 25} \\ &= \sqrt{45} \\ &= 3\sqrt{5} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} DB &= \sqrt{x_{\vec{DB}}^2 + y_{\vec{DB}}^2 + z_{\vec{DB}}^2} = \sqrt{3^2 + 1^2 + (-7)^2} \\ &= \sqrt{59} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{D'où : } \vec{DA} \cdot \vec{DB} &= 3\sqrt{5} \times \sqrt{59} \times \cos(\widehat{ADB}) \\ &= 3\sqrt{295} \times \cos(\widehat{ADB}) \end{aligned}$$

D'autre part :

$$\begin{aligned} \vec{DA} \cdot \vec{DB} &= -4 \times 3 + (-2) \times 1 + (-5) \times (-7) \\ &= -12 - 2 + 35 = 21 \end{aligned}$$

$$\text{D'où : } 3\sqrt{295} \times \cos(\widehat{ADB}) = 21$$

$$\Leftrightarrow \cos(\widehat{ADB}) = \frac{21}{3\sqrt{295}} = \frac{7}{\sqrt{295}}$$

$$\text{A la calculatrice : } \widehat{ADB} = \cos^{-1}\left(\frac{7}{\sqrt{295}}\right) \approx \underline{\underline{66^\circ}}$$