

Devoir Surveillé : Mme Vigour et Mr Mangeard

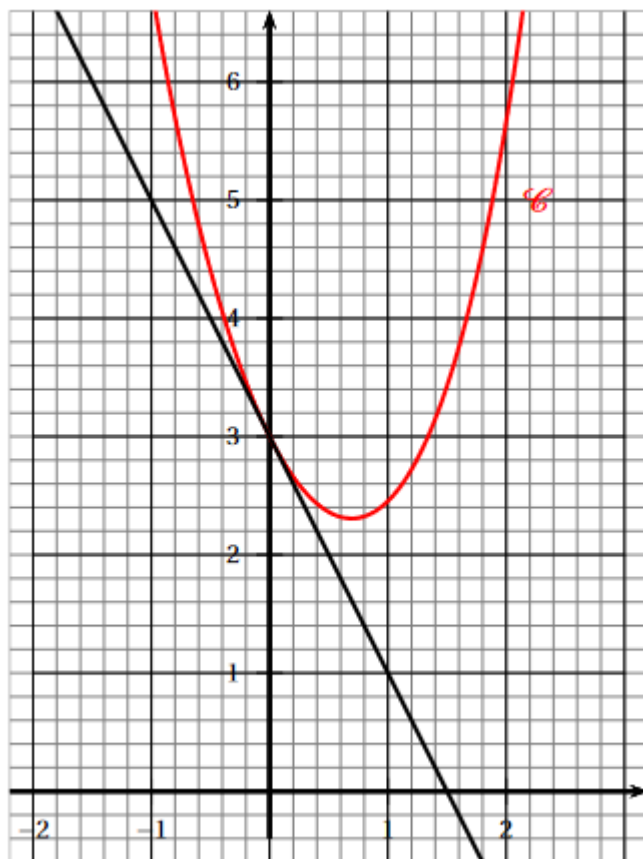
Exercice 1Partie A : Détermination d'une fonction f et résolution d'une équation différentielle

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = e^x + ax + be^{-x}$$

où a et b sont des nombres réels que l'on propose de déterminer dans cette partie.

Dans le plan muni d'un repère d'origine O, on a représenté ci-dessous la courbe $\mathcal{C}$, représentant la fonction f, et la tangente (T) à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0.



- 1) Par lecture graphique, donner les valeurs de $f(0)$ et de $f'(0)$. *On justifiera rapidement.*
- 2) En utilisant l'expression b de la fonction f, exprimer $f(0)$ en fonction de b et en déduire la valeur de b.
- 3) On admet que la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on note f' sa fonction dérivée.
 - a) Donner, pour tout réel x, l'expression de $f'(x)$.
 - b) Exprimer $f'(0)$ en fonction de a.
 - c) En utilisant les questions précédentes, déterminer a, puis en déduire l'expression de f(x).

4) On considère l'équation différentielle :

$$(E) : y' + y = 2e^x - x - 1$$

a) Vérifier que la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = e^x - x + 2e^{-x} \text{ est une solution particulière de (E)}$$

b) Résoudre l'équation différentielle $y' + y = 0$

c) En déduire toutes les solutions de l'équation (E).

Partie B : Etude de la fonction g sur $[1; +\infty[$

1) Vérifier que pour tout réel x , on a :

$$e^{2x} - e^x - 2 = (e^x - 2)(e^x + 1)$$

2) En déduire une expression factorisée de $g'(x)$, pour tout réel x .

a) Etudier le signe de $e^x - 2$ sur $[1; +\infty[$

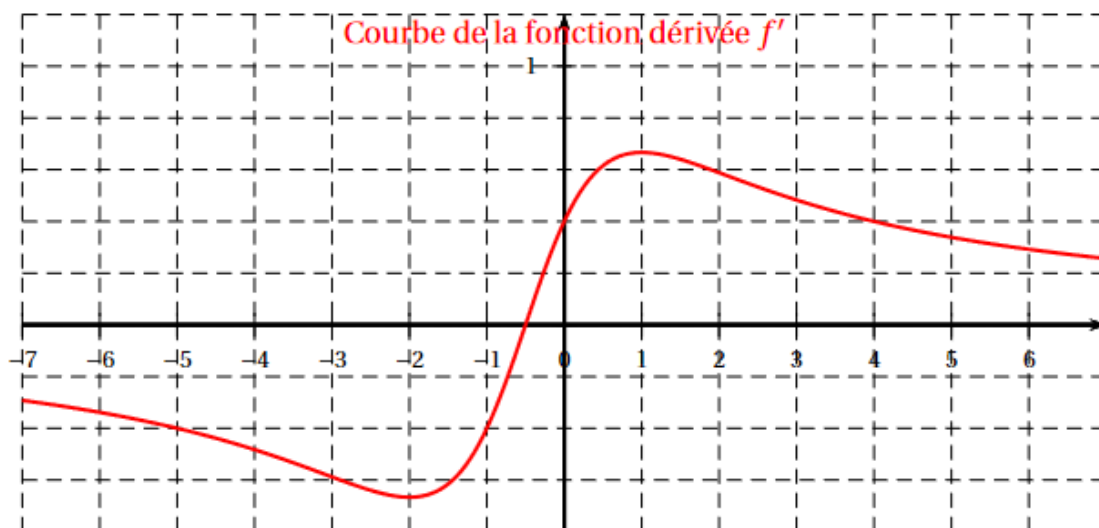
Etudier le sens de variation de la fonction g sur $[1; +\infty[$

Exercice 2

Partie A : Lectures graphiques

f désigne une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On donne ci-dessous la courbe représentative de la fonction dérivée f' .



Avec la précision permise par le graphique, répondre aux questions suivantes.

1) Déterminer le coefficient directeur de la tangente à la courbe de la fonction f en 0.

2) a) Donner les variations de la fonction dérivée f' .

b) En déduire un intervalle sur lequel f est convexe.

Partie B : Etude de fonction

La fonction f est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)$

- 1) Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en $-\infty$.
- 2) Déterminer une expression $f'(x)$ de la fonction dérivée de f pour tout réel x .
- 3) En déduire le tableau de variations de f .
- 4) a) Justifier que l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution α dans l'intervalle $\left[-\frac{1}{2}; +\infty\right[$.

Questions Bonus

b) Donner une valeur approchée de α à 10^{-1} près.

5) *La fonction f' est dérivable sur $\mathbb{R}$.*

a) Montrer que $f''(x) = \frac{-2x^2 - 2x + 4}{\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)^2}$

b) Déterminer le nombre de points d'inflexion de la courbe représentative de f .