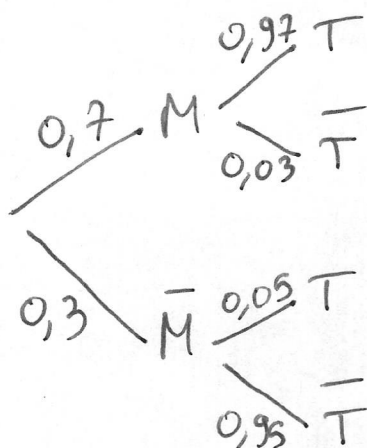


Exercice (1):

Partie (A):

1)



$$2) \underline{P(M \cap T)} = P(M) \times P_M(T) \\ = 0,7 \times 0,97 = \underline{0,679}$$

$$3) \underline{P(T)} = P(T \cap M) + P(T \cap \bar{M}) \\ = P(M) \times P_M(T) + P(\bar{M}) \times P_{\bar{M}}(T) \quad (\text{Formule des probabilités totales}) \\ = 0,7 \times 0,97 + 0,3 \times 0,05 \\ = \underline{0,694}$$

$$4) \underline{\frac{P(M)}{P(T)}} = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} \\ = \frac{0,679}{0,694} \simeq \underline{0,978}$$

$$5) a) \text{ "valeur prédictive négative du test" } \\ \underline{\frac{P(\bar{M})}{P(\bar{T})}} = \frac{P(\bar{M} \cap \bar{T})}{P(\bar{T})}$$

$$= \frac{0,3 \times 0,95}{1 - 0,694} \simeq \underline{0,931}$$

b) $\frac{P(M)}{P(T)} > \frac{P(\bar{M})}{P(\bar{T})}$: alors le test est plus révélateur quand il est positif.

Partie (B):

1) a) on répète 5 fois de manière indépendante, la même épreuve de Bernoulli (succès: Test positif) (tirage avec remise: c'est la même épreuve)
(échec: Test négatif)

X : compte les succès, alors X suit une loi binomiale $B(5; 0,694)$ (2)

$$\begin{aligned} b) \underline{P(X=1)} &= \binom{5}{1} \times 0,694^1 \times (1-0,694)^{5-1} \\ &= 5 \times 0,694 \times 0,306^4 \approx \underline{0,03} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c) P(X \geq 4) &= 1 - P(X < 4) \\ &= 1 - P(X \leq 3) \approx 0,916 > 0,9 \end{aligned}$$

L'affirmation est donc vraie

2) soit n = le nombre de coyotes capturés par les vétérinaires

$$P(X \geq 1) \geq 0,99$$

$$\Leftrightarrow 1 - P(X=0) \geq 0,99$$

$$\Leftrightarrow 1 - \binom{n}{0} \times 0,694^0 \times (1-0,694)^{n-0} \geq 0,99$$

$$\Leftrightarrow 1 - 1 \times (1-0,694)^n \geq 0,99$$

$$\Leftrightarrow 1 - 0,306^n \geq 0,99$$

$$\Leftrightarrow 0,306^n \leq 0,01$$

$$\text{d'où : } \ln(0,306^n) \leq \ln(0,01) \quad (\text{car } x \mapsto \ln(x) \text{ est croissante sur }]0; +\infty[)$$

$$\Leftrightarrow n \ln(0,306) \leq \ln(0,01)$$

$$\Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(0,01)}{\ln(0,306)} \approx 4$$

Il faut donc capturer au moins 4 coyotes.

Exercice 2:

Q1: (b) (la dérivée de f s'annule et change de signe en $-\frac{1}{2}$ en passant de signe positif à négatif).

Q2: (a) (sur $]-\infty; -\frac{3}{2}[$, f' est croissante, donc f est convexe sur cet intervalle)

Q3: (c) (en $x = -\frac{3}{2}$, (f'') présente un point d'inflexion car (u_n) croissante)

Q4: (b) (En particulier: $u_0 \leq u_1 \leq u_2 \leq \dots \leq u_n \leq v_n$)

Q5: (b) ($u_n \leq u_{n+1} \leq \frac{1}{n} \leq 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, u_n tend vers 0 et majorée convergente)

Q 6: (6) (pour tout $n \in \mathbb{N}$: $n < u_n < n+1$, d'où: (3)

$$n+1 < u_{n+1} < n+2 \quad -n-1 < -u_n < -n$$

$$\underline{0 < u_{n+1} - u_n < 2, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$$

Exercice (3):

1) Dans $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$:

$$E(0; 0; 1), \quad F(1; 0; 1), \quad G(1; 1; 1)$$

$$K(1; \frac{1}{2}; 0)$$

2) $\vec{n} \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\vec{EG} \begin{pmatrix} x_G - x_E \\ y_G - y_E \\ z_G - z_E \end{pmatrix}$, d'où $\vec{EG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\vec{EK} \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{pmatrix}$

On a: $\exists \vec{EG} = 0 \neq \exists \vec{EK} = -1$, d'où: il n'existe pas de réel $k \neq 0$ tel que $\vec{EG} = k \vec{EK}$

donc: $\vec{EG}$ et $\vec{EK}$ ne sont pas colinéaires.

Et sont donc deux vecteurs directeurs du plan (EGK)

$$\left. \begin{aligned} \vec{n} \cdot \vec{EG} &= 2 \times 1 - 2 \times 1 + 1 \times 0 = 2 - 2 + 0 = 0 \\ \text{et } \vec{n} \cdot \vec{EK} &= 2 \times 1 - 2 \times \frac{1}{2} + 1 \times (-1) = 2 - 1 - 1 = 0 \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \vec{n} \text{ est donc orthogonal} \\ \text{à deux vecteurs directeurs} \\ \text{du plan } (EGK) \end{array}$$

Donc: $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (EGK)

3) Soit $M(x; y; z) \in (EGK)$:

on a $\vec{EM} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}$ - $\vec{n}$ étant un vecteur normal au plan (EGK) ,
alors: $\vec{EM} \perp \vec{n}$

$$\Leftrightarrow \vec{EM} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2x - 2y + 1 \times (z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{2x - 2y + z - 1 = 0} \text{ est une équation cartésienne du plan } (EGK)$$

4) Soit $M(x; y; z) \in (d)$:

$$\vec{FM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y \\ z-1 \end{pmatrix}$$

comme (d) est orthogonale au plan (EGK) ,
 $\vec{n}$ étant normal au plan (EGK) ,

$\vec{FM}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires

c'est-à-dire : il existe $t \in \mathbb{R}$, $\vec{FM} = t\vec{n}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 = 2t \\ y = -2t, t \in \mathbb{R} \\ z-1 = t \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 1+2t \\ y = -2t, t \in \mathbb{R} \\ z = 1+t \end{cases}$$

c'est une représentation paramétrique
de la droite (d) .

5) $\left. \begin{array}{l} (d) \text{ passe par } F \text{ et } (d) \perp (EGK) \\ \text{et } (FL) \perp (EGK) \end{array} \right\} \text{d'où : } (FL) \text{ et } (d) \text{ sont confondues}$

D'où : $L \in (d) \cap (EGK)$.

Il existe $t \in \mathbb{R}$, tel que $\begin{cases} x_L = 1+2t \\ y_L = -2t \\ z_L = 1+t \end{cases}$

$$\text{et } 2(1+2t) - 2(-2t) + (1+t) - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 2 + 4t + 4t + 1 + t - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow 9t = -2$$

$$\Leftrightarrow t = -\frac{2}{9}$$

$$\text{d'où : } \begin{cases} x_L = 1 + 2 \times (-\frac{2}{9}) = \frac{5}{9} \\ y_L = -2 \times (-\frac{2}{9}) = \frac{4}{9} \\ z_L = 1 + (-\frac{2}{9}) = \frac{7}{9} \end{cases}$$

$$\text{donc } \underline{L \left(\frac{5}{9} ; \frac{4}{9} ; \frac{7}{9} \right)}$$

(5)

$$\begin{aligned}
 6) \quad LF &= \sqrt{(x_F - x_L)^2 + (y_F - y_L)^2 + (z_F - z_L)^2} \\
 &= \sqrt{\left(1 - \frac{9}{9}\right)^2 + \left(0 - \frac{4}{9}\right)^2 + \left(1 - \frac{7}{9}\right)^2} \\
 &= \sqrt{\left(\frac{4}{9}\right)^2 + \left(-\frac{4}{9}\right)^2 + \left(\frac{2}{9}\right)^2} \\
 &= \sqrt{\frac{16}{81} + \frac{16}{81} + \frac{4}{81}} = \sqrt{\frac{36}{81}} = \frac{6}{9} = \frac{2 \times 3}{3 \times 3} = \underline{\underline{\frac{2}{3}}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 7) \quad \text{Aire}(EFG) &= \frac{EF \times FG}{2} \quad (\text{car } (EFG) \text{ rectangle en } F). \\
 &= \underline{\underline{\frac{1}{2}}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \underline{V(EFGK)} &= \frac{1}{3} \times \text{Aire}(EFG) \times FB \\
 &= \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \underline{\underline{\frac{1}{6}}}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 8) \quad \text{On a: } V(EFGK) &= \frac{1}{3} \times \text{Aire}(EGK) \times FL \quad (\text{car } L \text{ est le projeté orthogonal de } F \text{ sur } (EGK)) \\
 &= \frac{1}{3} \times \text{Aire}(EGK) \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}
 \end{aligned}$$

$$(\Rightarrow) \text{Aire}(EGK) = \frac{1}{6} \times \frac{9}{2} = \frac{3 \times 3}{3 \times 2 \times 2} = \underline{\underline{\frac{3}{4}}}$$

$$\begin{aligned}
 9) \quad V(FPMN) &= \frac{1}{3} \times \text{Aire}(PMN) \times FL \quad (\text{car } (PMN) \subset (EGK)) \\
 &\text{comme } P, M, N \text{ sont les milieux respectifs de } [EG], [EK] \text{ et } [GK], \\
 \text{Aire}(PMN) &= \left(\frac{1}{2}\right)^2 \times \text{Aire}(EGK).
 \end{aligned}$$

$$\text{d'où: } V(FPMN) = \frac{1}{3} \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{1}{24}}}$$

Exercice 4:

(6)

1) a) $f(x) = 0,06(-x^2 + 13,7x)$.

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty, \text{ d'où } \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^2 = -\infty.$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} 13,7x = +\infty$$

} Par somme:
F.I du type " $\infty - \infty$ "

$$f(x) = x^2 \left(-0,06 + \frac{13,7}{x} \right)$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{13,7}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} -0,06 = -0,06 \quad \left. \begin{array}{l} \text{Par somme:} \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -0,06 + \frac{13,7}{x} = -0,06 \end{array} \right\}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty. \text{ d'où par produit:}$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$$

b) f est dérivable sur $[0; +\infty[$, car c'est une fonction lui-même du second degré.

$$f'(x) = -2 \times 0,06x + 0,06 \times 13,7 \\ = -0,12x + 0,822$$

$$f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow -0,12x + 0,822 \geq 0$$

$$\Leftrightarrow -0,12x \geq -0,822$$

$$\Leftrightarrow x \leq \frac{0,822}{0,12} = 6,85.$$

} d'où: f est
croissante sur $[0; 6,85]$
et décroissante
sur $[6,85; +\infty[$.

$$\text{et } \underline{f(0) = 0}$$

c) $f(x) = 0$

$$\Leftrightarrow -x^2 + 13,7x = 0$$

$$\Leftrightarrow x(-x + 13,7) = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } -x + 13,7 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{x = 0} \text{ ou } \underline{x = 13,7.}$$

2) a) $g(x) = (-0,15x + 2,2)e^{0,2x} - 2,2$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -0,15x + 2,2 = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{0,2x} = +\infty$$

$$\text{Par produit: } \lim_{x \rightarrow +\infty} (-0,15x + 2,2)e^{0,2x} = -\infty$$

} d'où:
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

6) $g(x) = (-0,15x + 2,2)e^{0,2x} - 2,2$

(7)

g est dérivable sur $]0; +\infty[$ comme produit et somme de fonctions dérivables sur $]0; +\infty[$

on pose : $u(x) = -0,15x + 2,2$

$u'(x) = -0,15$

$v(x) = e^{0,2x}$

$v'(x) = 0,2e^{0,2x}$

(car $(e^u)' = u'e^u$)

on a : $(uv)' = u'v + uv'$

d'où : $g'(x) = -0,15e^{0,2x} + (-0,15x + 2,2) \times 0,2e^{0,2x}$

$= e^{0,2x} (-0,15 - 0,15x \times 0,2 + 2,2 \times 0,2)$

$= e^{0,2x} (-0,15 - 0,03x + 0,44)$

donc $g'(x) = e^{0,2x} (-0,03x + 0,29)$

c) $e^{0,2x} > 0$, pour tout $x \in]0; +\infty[$.

$-0,03x + 0,29 > 0 \Leftrightarrow -0,03x > -0,29$

$\Leftrightarrow x \leq \frac{0,29}{0,03} = \frac{29}{3}$

d'où :

$g'(x) > 0$, pour $x \in]0; \frac{29}{3}[$

et $g'(x) \leq 0$, pour $x \in [\frac{29}{3}; +\infty[$

x	0	$\frac{29}{3}$	$+\infty$
signe de $g'(x)$	+	0	-
Variation de g			

$g(0) = 0$

En $\frac{29}{3}$, g' s'annule et change de signe donc g admet un extrémum local. D'après les variations, c'est un maximum.

on a $g(\frac{29}{3}) = (-0,15 \times \frac{29}{3} + 2,2)e^{0,2 \times \frac{29}{3}} - 2,2$
 $\approx 2,98$

d) sur $[\frac{29}{3}; +\infty[$, g est continue, strictement décroissante

avec $g(\frac{29}{3}) = 2,98$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = -\infty$

d'où : $0 \in]\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x); g(\frac{29}{3})[$

D'après le corollaire du TVI, l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[\frac{29}{3}; +\infty[$. A l'aide de la calculatrice, on trouve $\alpha \approx 13,72$.

- 1) a) D'après le tableau de variations de f , la hauteur maximale atteinte (8) est donnée par $f(6,85) \approx 2,815$ soit 28,15 yards (Δx étant en dizaines de yards)
- b) $\underline{f'(0) = -0,12 \times 0 + 0,822 = 0,822}$
- c) Angle de décollage $\approx \underline{39,4^\circ}$ (car d'après le tableau fourni, si $\tan(\theta) = 0,822$, alors $\theta \approx 39,4^\circ$)
- d) $\mathcal{G}_f$ est une parabole ayant pour axe de symétrie la droite verticale d'équation $x = 85$
 d'où les angles de décollage et d'atterrissage sont égaux
- 2) a) D'après la question Partie (A) 2)c), le maximum de g est environ égal à 2,98, soit 29,8 yards
- b) On sait que $g'(0) = 0,29$: coeff. directeur de la tangente à $(\mathcal{G}_g)$ au pt d'abaisso
- d'après le tableau fourni: si $\tan(\theta) \approx 0,29$, alors $\theta \approx 16,2^\circ$.
 d'où: l'angle de décollage est d'environ $16,2^\circ$
- c) Comme $g'(13,4) \approx -1,87$, alors $\tan(\alpha) \approx 1,87$ (si α : angle d'atterrissage).
 or, $\tan(62^\circ) \approx 1,88$. et $\tan(61^\circ) \approx 1,8$
 Donc, au degré près, l'angle d'atterrissage est de 62°
- Partie (C):
 Les valeurs obtenues semblent beaucoup plus proches de celles données par le second modèle.
- | | | | |
|-------------|--------------|-------|--------------|
| Modèle (1): | $39,4^\circ$ | 28,15 | $39,4^\circ$ |
| Modèle (2): | $16,2^\circ$ | 29,8 | 62° |