

Exercice (3): Repère $(A; \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$

1)

$$B(1; 0; 0)$$

$$D(0; 1; 0)$$

$$E(0; 0; 1)$$

$$\begin{aligned}\vec{AG} &= \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CG} \text{ (rel de Chasles)} \\ &= \vec{AB} + \vec{AD} + \vec{AE} \text{ (car } \vec{BC} = \vec{AD} \text{ et } \vec{CG} = \vec{AE}) \\ \text{d'où: } G(1; 1; 1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{AH} &= \vec{AD} + \vec{DH} \text{ (rel de Chasles)} \\ &= \vec{AD} + \vec{AE} \text{ (car } \vec{DH} = \vec{AE}) \\ &= 0\vec{AB} + 1\vec{AD} + 1\vec{AE}\end{aligned}$$

$$\text{d'où: } H(0; 1; 1)$$

2) a) On a: $[EG]$ est une diagonale du carré $EFCH$

$$\text{d'où: } EG = EH \times \sqrt{2} = 1 \times \sqrt{2} = \sqrt{2}$$

$[GD]$ est une diagonale du carré $CDHG$

$$\text{d'où: } GD = \sqrt{2}$$

$[ED]$ est une diagonale du carré $ADHE$

$$\text{d'où: } ED = \sqrt{2}$$

d'où :

$EG = GD = ED$
donc le triangle
 EGD est équilatéral

$$b) \text{ Aire}(EGD) = \frac{\sqrt{3}}{4} \times EG^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times (\sqrt{2})^2 = \frac{\sqrt{3}}{4} \times 2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

3) On pose $(x; y; z)$ les coordonnées de M

$$\vec{BM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-0 \\ z-0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BH} \begin{pmatrix} 0-1 \\ 1-0 \\ 1-0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{BH} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{or, } \vec{BM} = \frac{1}{3} \vec{BH}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x-1 = -\frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x = -\frac{1}{3} + 1 = \frac{2}{3} \\ y = \frac{1}{3} \\ z = \frac{1}{3} \end{cases}$$

Donc: M a pour coordonnées $(\frac{2}{3} ; \frac{1}{3} ; \frac{1}{3})$

$$4) a) \left. \begin{array}{l} \vec{EG} \begin{pmatrix} 1-0 \\ 1-0 \\ 1-1 \end{pmatrix}, \text{ d'où } \vec{EG} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{ED} \begin{pmatrix} 0-0 \\ 1-0 \\ 0-1 \end{pmatrix}, \text{ d'où } \vec{ED} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{ces deux vecteurs ne sont pas} \\ \text{colinéaires.} \\ \text{En effet:} \\ z_{\vec{EG}} = 0 \text{ et } z_{\vec{ED}} = -1 \neq 0 \\ \text{il n'existe donc pas de réel } k \text{ tel que} \\ z_{\vec{ED}} = k z_{\vec{EG}} \\ \text{c'est-à-dire: il n'existe pas de réel } k \\ \text{tel que: } \vec{ED} = k \vec{EG} \end{array}$$

$\vec{ED}$ et $\vec{EG}$ sont donc deux vecteurs directeurs du plan (EGD).

$$\vec{n} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \vec{n} \cdot \vec{ED} = -1 \times 0 + 1 \times 1 + 1 \times (-1) \\ \quad \quad \quad = 0 \\ \text{et } \vec{n} \cdot \vec{EG} = -1 \times 1 + 1 \times 1 + 1 \times 0 \\ \quad \quad \quad = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{donc } \vec{n} \text{ est orthogonal} \\ \text{à deux vecteurs directeurs} \\ \text{du plan (EGD)} \\ \text{Donc: } \vec{n} \text{ est un vecteur} \\ \text{normal au plan (EGD)} \end{array}$$

b) Soit $N(x; y; z) \in (EGD)$:

$$\vec{EN} \begin{pmatrix} x-0 \\ y-0 \\ z-1 \end{pmatrix} \quad \text{comme } \vec{n} \text{ est normal au plan (EGD), } \vec{n} \perp \vec{EN}$$

$$\Leftrightarrow \vec{n} \cdot \vec{EN} = 0$$

$$\Leftrightarrow -1 \times x + 1 \times y + 1 \times (z-1) = 0$$

$$\Leftrightarrow \underline{-x + y + z - 1 = 0} \quad (\text{c'est une équation cartésienne du plan (EGD)})$$

c) (d) est orthogonal à (EGD), d'où $\vec{m}$ est un vecteur directeur de (d)

Soit $N(x; y; z) \in (d)$:

$$\vec{MN} \begin{pmatrix} x - \frac{2}{3} \\ y - \frac{1}{3} \\ z - \frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ est un vecteur directeur de (d)}$$

or, deux vecteurs directeurs d'une même droite sont colinéaires

$$\overrightarrow{MN} = t \overrightarrow{m}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \frac{2}{3} = -t \\ y - \frac{1}{3} = t \\ z - \frac{1}{3} = t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{2}{3} - t \\ y = \frac{1}{3} + t \\ z = \frac{1}{3} + t \end{cases}, \quad t \in \mathbb{R}$$

c'est une représentation paramétrique de la droite (d)

5) a) K est alors le point d'intersection de (d) avec (BGD)

$K(x; y; z)$: $(x; y; z)$ est solution du système:

$$\begin{cases} -x + y + z - 1 = 0 \\ \begin{cases} x = \frac{2}{3} - t \\ y = \frac{1}{3} + t \\ z = \frac{1}{3} + t \end{cases}, t \in \mathbb{R} \end{cases}$$

on a: $-(\frac{2}{3} - t) + \frac{1}{3} + t + \frac{1}{3} + t - 1 = 0$

$$\Leftrightarrow 3t - \frac{2}{3} + \frac{2}{3} - 1 = 0 \Leftrightarrow 3t = 1 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3}$$

Alors: $\begin{cases} x = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3} \\ y = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \\ z = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \end{cases}$, donc: K a pour coordonnées $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3}; \frac{2}{3})$

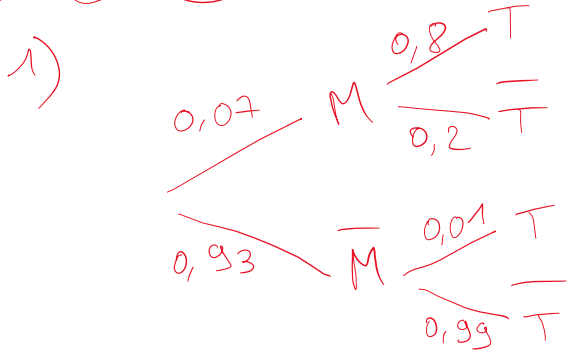
b) $V = \frac{1}{3} \times \mathcal{B} \times h = \frac{1}{3} \times \text{Aire}(\triangle GBD) \times MK$
 $= \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times MK$ (d'après quest 2 b))

or, $MK = \sqrt{(x_K - x_M)^2 + (y_K - y_M)^2 + (z_K - z_M)^2}$
 $= \sqrt{(\frac{1}{3} - \frac{2}{3})^2 + (\frac{2}{3} - \frac{1}{3})^2 + (\frac{2}{3} - \frac{1}{3})^2}$
 $= \sqrt{(-\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2 + (\frac{1}{3})^2} = \sqrt{\frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$

D'où : $V = \frac{1}{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{3}$

$V = \frac{1}{6}$ (volume de la pyramide GEDM)

Exercice (4) :



2) a) $\underline{P(M \cap T)} = P(M) \times P(T)_M$
 $= 0,07 \times 0,8 = \underline{0,056}$

b) $\underline{P(T)} = P(T \cap M) + P(T \cap \bar{M})$
 $= P(M) \times P(T)_M + P(\bar{M}) \times P(T)_{\bar{M}}$ (formule des probabilités totales)
 $= 0,07 \times 0,8 + 0,93 \times 0,01$
 $= \underline{0,0653}$

3) $\underline{\frac{P(M)}{P(T)}} = \frac{P(M \cap T)}{P(T)} = \frac{0,07 \times 0,8}{0,0653} \approx \underline{0,86}$

4) a) On répète 10 fois de manière indépendante la même épreuve de Bernoulli (il y a remise)

(Succès : le test est positif
 Echec : le test est négatif) de paramètre $p = 0,0653$

X compte le nombre de succès à l'issue des 10 prélèvements

Alors : X suit une loi binomiale de paramètres $\begin{cases} n = 10 \\ p = 0,0653 \end{cases}$

b) $\underline{P(X=2)} = \binom{10}{2} \times 0,0653^2 \times (1-0,0653)^{10-2}$
 $\approx \underline{0,11}$

$$\begin{aligned}
 5) a) \quad P(X \geq 1) &= 1 - P(X < 1) \\
 &= 1 - P(X = 0) \\
 &= 1 - \binom{n}{0} \times 0,0653^0 \times (1 - 0,0653)^{n-0} \\
 &= 1 - 1 \times 0,9347^n \\
 &= \underline{1 - 0,9347^n}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b) \quad P(X \geq 1) &\geq 0,99 \Leftrightarrow 1 - 0,9347^n \geq 0,99 \\
 &\Leftrightarrow 0,9347^n \leq 1 - 0,99 = 0,01
 \end{aligned}$$

A l'aide de la calculatrice, on trouve :

$n = 69$: le plus petit entier naturel vérifiant la condition.

Il faut donc tester au minimum 69 personnes pour que la probabilité qu'au moins une de ces personnes présente un test positif soit supérieure à 99%.