

Exercice 1 :

$$1) \underline{f(0) = 3} \text{ (car le point } A(0; 3) \in \mathcal{C})$$

$f'(0)$: c'est le coefficient de la tangente (+) à la courbe $\mathcal{C}$
Par lecture graphique $\underline{f'(0) = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2}{1} = -2}$

$$2) f(0) = e^0 + 0 + b e^0 = 1 + b = 3 \text{ (d'après 1))}$$
$$\Leftrightarrow \underline{b = 3 - 1 = 2}$$

$$3) a) \underline{f'(x) = e^x + a - 2e^{-x}}$$

$$b) \underline{f'(0) = e^0 + a - 2e^0}$$
$$= 1 + a - 2 = \underline{-1 + a}$$

$$c) \text{ D'après 1), } f'(0) = -2$$

$$\text{d'où : } -1 + a = -2 \Leftrightarrow \underline{a = -2 + 1 = -1}$$

$$\text{Donc : } \underline{f(x) = e^x - x + 2e^{-x}}$$

$$4) (E) : y' + y = 2e^x - x - 1$$

$$a) \text{ Soit } g(x) = e^x - x + 2e^{-x}$$

$$g \text{ est dérivable sur } \mathbb{R} \text{ et : } g'(x) = e^x - 1 - 2e^{-x}$$

$$\text{d'où : } g'(x) + g(x) = e^x - 1 - 2e^{-x} + e^x - x + 2e^{-x}$$
$$= 2e^x - x - 1$$

donc : g est une solution particulière de l'équation (E)

$$b) y' + y = 0 \Leftrightarrow y' = -y$$

cette équation est de la forme $y' = ay$ avec $a = -1$

Les solutions sont les fonctions f définies par: $f(x) = Ce^{ax}$, $C \in \mathbb{R}$
 d'où: $f(x) = Ce^{-x}$, $C \in \mathbb{R}$

c) Les solutions de (E) correspondent à toutes les solutions de l'équation $y' + y = 0$ et une solution particulière de (E)

Autrement dit:

Si on note R les solutions de (E):

$$R(x) = Ce^{-x} + e^x - x + 2e^{-x}, \quad C \in \mathbb{R}$$

Partie (B):

$$1) \quad (e^x - 2)(e^x + 1) = e^{2x} + e^x - 2e^x - 2 \\ = e^{2x} - e^x - 2, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

$$2) \text{ D'après partie (A) 4a), } g'(x) = e^x - 1 - 2e^{-x} \\ = e^{-x} (e^{2x} - e^x - 2) \\ g'(x) = e^{-x} (e^x - 2)(e^x + 1)$$

$$3) a) \quad e^x - 2 \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq 2 > 0$$

$$\Leftrightarrow x \geq \ln(2) \quad (\text{car } x \mapsto \ln(x) \text{ croissante sur } \mathbb{R}^{++})$$

Signe de $e^x - 2$:

x	$-\infty$	$\ln(2)$	$+\infty$
signe de $e^x - 2$	-	0	+

b) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $e^{-x} > 0$ et $e^x + 1 > 0$

D'où le signe de $g'(x)$ ne dépend que de celui de $e^x - 2$

Donc: $g'(x) \geq 0 \Leftrightarrow x \in [\ln(2); +\infty[$

et $g'(x) < 0 \Leftrightarrow x \in]-\infty; \ln(2)[$

Par conséquent: $\left\{ \begin{array}{l} * g \text{ est croissante sur } [\ln(2); +\infty[\\ * g \text{ est décroissante sur }]-\infty; \ln(2)[\end{array} \right.$

Exercice (2):

Partie (A):

1) Par lecture graphique: $f'(0)$: coefficient directeur de la tangente à la courbe de f en $x=0$

$$\underline{f'(0) = 0,4}$$

2) a) * Sur $] -\infty; -2[\cup] 1; +\infty[$, f' est décroissante

* Sur $[-2; 1]$, f' est croissante

b) Sur $[-2; 1]$, f' est croissante $\Leftrightarrow$ f est convexe sur $[-2; 1]$

Partie B:

1) $f(x) = \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right)$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{5}{2} = \frac{5}{2} \end{array} \right\} \text{d'où par somme: } \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 + x + \frac{5}{2} = +\infty$$

$$\text{or, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

D'où, par composée:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$$

d'où: par somme, on a une FI du type " $\infty - \infty$ "

$$x^2 + x + \frac{5}{2} = x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{2x^2} \right)$$

$$\text{or, } \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5}{2x^2} = 0$$

$$\text{d'où, par somme: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{2x^2} \right) = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{par produit:} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 \left(1 + \frac{1}{x} + \frac{5}{2x^2} \right) \\ = +\infty \end{array} \right.$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty$$

$$\text{or, } \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln(x) = +\infty$$

$$\text{D'où, par composée: } \lim_{x \rightarrow -\infty} \ln\left(x^2 + x + \frac{5}{2}\right) = +\infty$$

2) f est définie et dérivable sur $\mathbb{R}$:

$$\text{on pose: } u(x) = x^2 + x + \frac{5}{2}$$

$$u'(x) = 2x + 1$$

$$\text{or, } \left[\ln(u) \right]' = \frac{u'}{u}$$

$$\text{D'où: } f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}$$

3) $x^2 + x + \frac{5}{2} > 0$, pour tout $x \in \mathbb{R}$
d'où le signe de $f'(x)$ ne dépend que de celui de $2x+1$

$$\text{or, } 2x+1 > 0 \Leftrightarrow x > -\frac{1}{2}$$

x	$-\infty$	$-\frac{1}{2}$	$+\infty$
signe de $f'(x)$	-	0	+
Variations de f	$+\infty$	$\ln\left(\frac{9}{4}\right)$	$+\infty$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \ln\left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2} + \frac{5}{2}\right) = \ln\left(\frac{9}{4}\right) \approx 0,81$$

$$4a) f(x) = \ln(x^2 + x + \frac{5}{2})$$

* f est une fonction continue sur $[-\frac{1}{2}; +\infty[$

* D'après 3), f est strictement croissante sur $[-\frac{1}{2}; +\infty[$

* D'autre part, $f(-\frac{1}{2}) = \ln(\frac{9}{4}) \approx 0,81$

$$\text{et } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

$$\text{d'où : } 2 \in]f(-\frac{1}{2}); \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)[$$

D'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution α dans $[-\frac{1}{2}; +\infty[$

b) A la calculatrice, on trouve : $\alpha \approx 1,8$

$$5) a) f'(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+\frac{5}{2}}$$

$$\text{On pose : } u(x) = 2x+1$$

$$v(x) = x^2 + x + \frac{5}{2}$$

$$u'(x) = 2$$

$$v'(x) = 2x+1$$

$$\text{or, } \left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\text{d'où : } f'(x) = \frac{2(x^2+x+\frac{5}{2}) - (2x+1)^2}{(x^2+x+\frac{5}{2})^2}$$

$$= \frac{2x^2 + 2x + 5 - (4x^2 + 4x + 1)}{(x^2+x+\frac{5}{2})^2}$$

$$\text{donc : } \underline{\underline{f''(x) = \frac{-2x^2 - 2x + 4}{(x^2+x+\frac{5}{2})^2}}}$$

$$\text{On a : } (x^2+x+\frac{5}{2})^2 > 0, \text{ pour tout } x \in \mathbb{R}$$

Etude du signe de $-2x^2 - 2x + 4$:

$$\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4 \times (-2) \times 4 = 4 + 32 = 36 > 0$$

Le trinôme admet donc deux racines réelles distinctes.

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 + 6}{-4} = -2$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{2 - 6}{-4} = 1$$

Le trinôme est du signe de a à l'extérieur de ses racines.

$$\text{Or, } a = -2 < 0$$

$$* -2x^2 - 2x + 4 \leq 0, \text{ pour } x \in]-\infty; -2] \cup [1; +\infty[$$

$$* -2x^2 - 2x + 4 > 0, \text{ pour } x \in]-2; 1[$$

Autrement dit:

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$	
Signe de $f''(x)$	$-$	$\bigcirc$	$+$	$\bigcirc$	$-$

f'' s'annule et change de signe en -2 et en 1

Donc: La courbe de f admet deux points d'inflexion