

NOM : Prénom :

Spé Maths Terminale	<u>Devoir de mathématiques :</u> <i>Fonction ln</i>	10/03/2022
------------------------	---	------------

- Calculatrice autorisée
- Durée : 45 min
- Sujet à rendre

EXERCICE N° 1 (8 pts et 15 min)

1) a) Simplifier au maximum les expressions suivantes :

$$A = \ln(\sqrt{e^7}) + \frac{\ln(e^9)}{\ln(e^2)} \text{ et } B = \frac{e^{\ln 2 + \ln 3}}{e^{\ln 3 - \ln 4}}$$

b) Que peut-on en déduire pour A et B

2) Déterminer les entiers naturels n tels que : $\left(\frac{2}{3}\right)^n < 10^{-4}$

3) Résoudre les équations suivantes après avoir indiqué les domaines d'existence :

a) $2\ln x = \ln(x+4) + \ln(2x)$

b) $3e^{x-1} = 2$

4) Etudier le signe sur $]0 ; +\infty[$ de la fonction $f(x) = \ln(x)(2\ln x - 1)$

EXERCICE N° 2 (12 pts et 30 min)

Soit $f(x) = x + 4 - 4\ln(x) - \frac{3}{x}$. On note (C_f) sa courbe représentative dans un repère du plan.

1) Calculer $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

2) On admet que f est dérivable sur $]0 ; +\infty[$

a) Montrer que $f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2}$

b) Dresser le tableau de variations de f sur $]0 ; +\infty[$

3) Montrer qu'il existe un point de C_f en lequel la tangente est parallèle à la droite D d'équation $y = x$ et déterminer l'équation de cette tangente T

4) f est deux fois dérivable sur $]0 ; +\infty[$.

a) Montrer que : $f''(x) = \frac{4x^2 - 6x}{x^4}$

b) Etudier la convexité de f sur $]0 ; +\infty[$

c) En déduite la position relative de C_f et de la tangente T obtenue à la question 3)

5) Montrer que (C_f) n'admet sur $]0 ; +\infty[$ qu'un seul point d'inflexion dont on donnera les coordonnées.

QUESTIONS BONUS

6) a) Montrer que $f(x) = \frac{x^2 + 4x - 4x \ln x - 3}{x}$.

b) En déduire $\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x)$

7) Montrer que l'équation $f(x) = 0$ admet exactement une solution sur $]0 ; +\infty[$