Spé Maths Terminale (M Mangeard)	**Géométrie dans l'espace (2) :** *Orthogonalité dans l'espace / Equations cartésiennes de plans*	Année scolaire 2021/2022

I) Produit scalaire dans l'espace :

On va étendre le produit scalaire du plan, ainsi que ses propriétés à l'espace.

(Pour le produit scalaire dans le plan, voir le cours de Spé Première à ce sujet)

1) Définition :

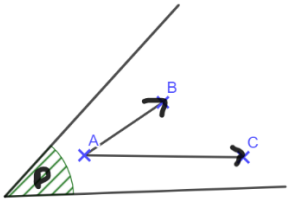
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$, deux vecteurs de l'espace. On considère trois points A, B et C tels que :

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$. Il existe au moins un plan (P) contenant A, B et C.

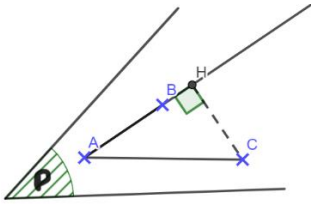
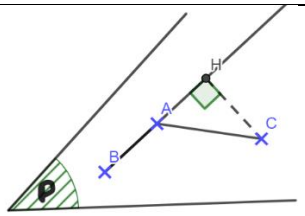
Le produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, noté $\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}$ calculé dans (P)

2) Propriétés :

a) Expression avec cos :

	$\vec{u} \cdot \vec{v}$ = AB×AC×cos($\widehat{BAC}$)

b) Si H est le projeté orthogonal du point C sur (AB) :

	
$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$ = AB×AH	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$ = - AB×AH

c) Soient $\vec{u}$, $\vec{v}$ et $\vec{w}$, trois vecteurs de l'espace. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$$
$$\vec{u} \cdot \overrightarrow{\lambda v} = \lambda \vec{u} \cdot \vec{v}$$
$$\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$$

d) Carré scalaire et norme :

Soit $\vec{u}$, un vecteur de l'espace. $\vec{u} \cdot \vec{u} = \vec{u}^2$ (=carré scalaire du vecteur $\vec{u}$)

La norme du vecteur $\vec{u}$ est notée $||\vec{u}||$ et $||\vec{u}|| = \sqrt{\vec{u}^2}$

e) Identités remarquables et normes :

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

$\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

Démonstration de la première formule : (c'est la même que dans le plan)

$\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})^2 = (\vec{u}+\vec{v}).(\vec{u}+\vec{v})$

$= \vec{u}^2 + \vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}\cdot\vec{u} + \vec{v}^2$

$= \vec{u}^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \vec{v}^2$

$= \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}\cdot\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

f) Formules de polarisation :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2]$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{2}[\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2]$$

Démonstrations (faciles)

Remarque : On peut aussi démontrer la relation suivante :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \frac{1}{4}[\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2]$$

g) Orthogonalité de deux vecteurs :

$\vec{u}$ orthogonal à $\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u}\cdot\vec{v} = 0$

Remarque : Le vecteur nul est orthogonal à tout vecteur de l'espace.

II) Bases orthonormées . Repères orthonormés :

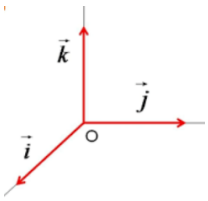
1) Bases et repères :

Une base $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ de l'espace est dite **orthonormée** si ses vecteurs sont …….. et si :

……..……

Soit O un point de l'espace.

$(O ; \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est **un repère orthonormé** de l'espace si $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$ est ……



2) Expression analytique du produit scalaire :

Soient $\vec{u}(x; y; z)$ et $\vec{v}(x'; y'; z')$, deux vecteurs dans un repère orthonormé de l'espace.

Alors : $\vec{u}\cdot\vec{v}$ = ……

3) Norme et distance dans un repère orthonormé :

Soit $\vec{u}(x; y; z)$ dans un repère orthonormé du plan.

Alors : $\|\vec{u}\|$ = ...

Soient $A(x_A ; y_A ; z_A)$ et $B(x_B ; y_B ; z_B)$ dans un repère orthonormé de l'espace.

Alors : AB = ...

Exemple : Equation cartésienne d'une sphère

Soit Ω(a ;b ;c) un point de l'espace.

Une équation cartésienne de la sphère de centre Ω et de rayon R (avec $R \geq 0$) est donnée par :

……..

En effet :

La sphère de centre Ω et de rayon R est l'ensemble des points M(x ;y ;z) de l'espace tels que :

Application : Montrer que l'équation suivante est une équation cartésienne d'une sphère dont on donnera les éléments caractéristiques :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y - 10z + 36 = 0 \quad (E)$$

III) Orthogonalité dans l'espace :

1) Orthogonalité de deux droites :

a) Définition :

Deux droites de l'espace sont dites orthogonales si leurs parallèles respectives passant par un même point sont …….

ATTENTION : *Deux droites orthogonales de l'espace ne sont pas obligatoirement ……*

…….

b) Propriété :

Soient (d) et (d'), deux droites de l'espace. On considère les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{u}'$, vecteurs directeurs respectifs des droites (d) et (d').

(d) est orthogonale à (d') ⇔ … … … … … … … …

2) Orthogonalité d'une droite et d'un plan :

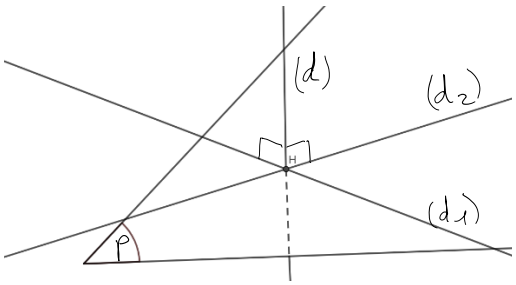
a) Définition :

Soient (d) une droite de l'espace et (P) un plan.

(d) est orthogonale à (P) si (d) …….

b) Propriété :

(d) est orthogonale à (P) si (d) ……



(d_1) et (d_2) sont deux droites sécantes du plan (P)

(d) est à la fois orthogonale à (d_1) et à (d_2)

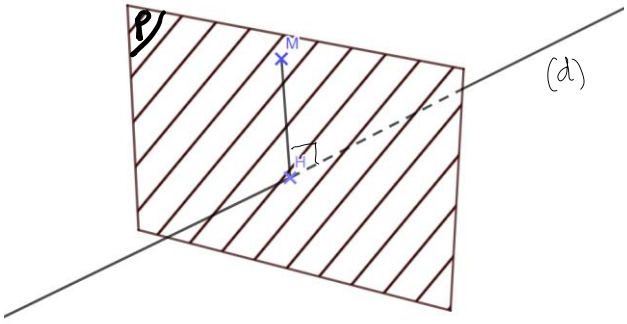
Donc : **(d) est orthogonale au plan (P)**

IV) Projection orthogonale dans l'espace :

1) Projection orthogonale d'un point sur une droite :

a) Définition :

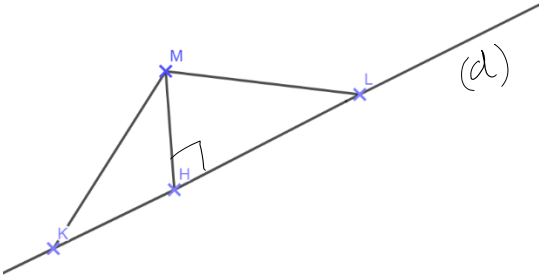
Le projeté orthogonal d'un point M sur une droite (d) est le point H, point d'intersection du plan orthogonal à la droite (d) passant par M avec la droite (d).



Remarque : Si M ∈(d), son projeté orthogonal sur (d) est lui-même.

b) Propriété :

H est le point de (d) le plus proche de M.



Démonstration :

Soient K et L, deux points situés sur (d) distincts de H

MHL est un triangle rectangle en H, d'où [ML] est son hypoténuse.

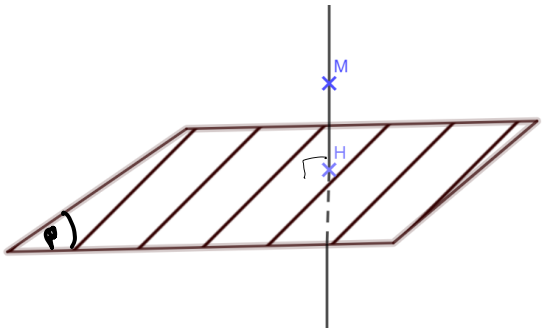
D'où : ML > MH

Même chose dans le triangle MHK, rectangle en H

Définition : La longueur MH est la distance entre M et la droite (d).

2) Projection orthogonale d'un point sur un plan :

a) Définition :



Le projeté orthogonal d'un point M sur un plan (P) est le point H, point d'intersection du plan (P) avec la droite orthogonale au plan (P) passant par le point M.

b) Propriété :

Le point H est le point du plan (P) le plus proche de M

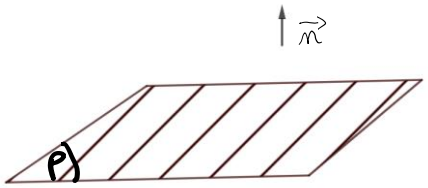
On appelle distance du point M au plan (P) la longueur MH

V) Equations cartésiennes de plans :

1) Vecteur normal à un plan :

a) Définition :

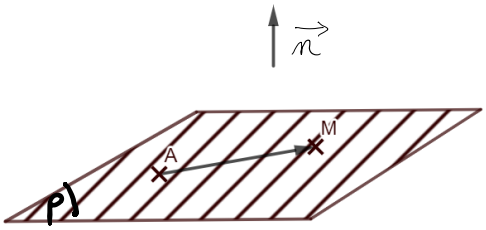
Un vecteur $\vec{n}$ est dit normal au plan (P) si ……



b) Propriété :

Soit (P) un plan de l'espace. A un point de (P) et $\vec{n}$ un vecteur normal à (P).

L'ensemble des points M de l'espace tels que : ……



2) Equations cartésiennes :

Dans un repère orthonormé, on considère un plan (P).

M(x ;y ;z) $\in$(P) $\Leftrightarrow$ il existe quatre nombres a, b, c et d, non tous nuls tels que : ……

Cette dernière égalité est appelée une équation cartésienne du plan (P)

Ce plan (P) admet le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ comme vecteur normal.

En effet : A(x_A ;y_A ;z_A) $\in$(P) $\Leftrightarrow$ $ax_A + by_A + cz_A + d = 0$ (1)

De même : M(x ;y ;z) $\in$(P) $\Leftrightarrow$ ax + by +cz + d = 0 (2)

En faisant (2) – (1) : $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

Or, $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A)$

De plus, l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ est le plan (P)

Donc : (P) est bien un plan de l'espace admettant $\vec{n}$ comme vecteur normal.

Exemple d'application :

Soit (P) un plan de l'espace admettant le vecteur $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$ comme vecteur normal et passant par le point A(6 ;-2 ;1)

Déterminer une équation cartésienne du plan (P).

Méthode 1 :

Méthode 2 :