Spé Maths Terminale (M Mangeard)	**Cours (à compléter) : Primitives et équations différentielles**	2021/2022

Introduction et généralités :

De manière générale, une équation différentielle est une égalité dans laquelle l'inconnue est une fonction et qui met en relation cette fonction et certaines de ses dérivées.

Résoudre une telle équation consiste à trouver toutes les fonctions qui vérifient la relation donnée dans cette équation.

Les équations différentielles sont très utilisées pour décrire l'évolution de systèmes, parfois complexes, comme le climat, les variations de grandeurs physiques ou chimiques, etc…

Remarque : *Cette année, nous n'étudierons que quelques types très particuliers d'équations différentielles.*

I) Lien équations différentielles – primitives :

1) Définition :

Soit f une fonction définie sur $I \subset \mathbb{R}$.

Dire que F est une primitive de f sur I signifie que **F est dérivable sur I et F' = f**

(Autrement dit : F est une solution de l'équation différentielle y' = f)

Exemples :

a) Soit $f(x) = x^2$

b) $g(x) = e^{5x}$

Remarque :

2) Propriétés :

Prop1 : Tout fonction continue sur $I \subset \mathbb{R}$ admet une infinité de primitives sur I

Plus précisément : Soit f une fonction continue sur $I \subset \mathbb{R}$. Si F est une primitive de f sur I, alors $G = F + k$, avec $k \in \mathbb{R}$ est une autre primitive de f sur I.

Deux primitives d'une même fonction différent d'une constante.

L'équation y' = f admet toutes les primitives de f comme solutions sur I

Prop2 : Soit f une fonction continue sur $I \subset \mathbb{R}$ et $(x_0 ; y_0) \in I^2$. Alors, il existe une unique primitive F de f sur I telle que : $F(x_0) = y_0$

Démonstration :

II) Tableau de primitives :

Pré requis : il faut bien connaître les formules des dérivées !

K est nombre réel :

Fonction f définie sur I :	**Les primitives de f sont définies sur I par $F(x) =$**	**L'intervalle I**
$f(x) = a$, avec a réel	$F(x) = ax + K$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x$	$F(x) = \frac{1}{2} x^2 + K$	$\mathbb{R}$

$f(x) = x^n$, avec n entier relatif $n \neq -1$	$F(x) = \frac{1}{n+1}\, x^{n+1}$ +K	ℝ ou ℝ* si n est négatif
$f(x) = \frac{1}{x}$	$F(x) = \ln(x)$ + K	$]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	$F(x) = -\frac{1}{x} + K$	$]-\infty; 0[$ ou $]0; +\infty[$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	$F(x) = 2\sqrt{x}$ + K	$]0; +\infty[$
$f(x) = e^x$	$F(x) = e^x$ + K	ℝ
f(x) = sin x	F(x) = - cos x + K	ℝ
f(x) = cos x	F(x) = sin x + K	ℝ
$f(x) = u'(x) \times e^{u(x)}$	$F(x) = e^{u(x)}$ + K	Domaine de définition de u
$f(x) = \frac{u'(x)}{u(x)^2}$	$F(x) = -\frac{1}{u(x)} + K$	Définie pour $u(x) \neq 0$
f(x) = $u'(x)(u(x))^n$ (n entier ≠ 0 et ≠ 1)	F(x) = $\frac{1}{n+1}\left(\left(u(x)\right)^{n+1}\right) + K$	Domaine de définition de u Si n < -1, u(x) ≠ 0 pour tout x ϵ I
f(x) = $\frac{u'(x)}{u(x)}$	F(x) = ln u(x) + K	u(x) > 0 sur I
f(x) = $\frac{u'(x)}{\sqrt{u(x)}}$	F(x) = $2\sqrt{u(x)}$ + K	u(x) > 0 sur I

<u>Exemples de calculs de primitives en utilisant les formules précédentes :</u>

Déterminer des primitives des fonctions suivantes sur un domaine D le plus grand possible à préciser :

1) $f(x) = 2x^4 - 5x^3 + 2x^2 - x + 5$

2) $g(x) = \frac{7}{\sqrt{x}}$

3) $h(x) = (2x + 1)e^{x^2+x}$

4) $i(x) = 5x^2e^{x^3+1}$

5) $k(x) = \frac{9}{(7x+1)^2}$

6) $l(x) = \frac{6x}{x^2+1}$

7) $m(x) = \frac{3}{x^2}(1 + \frac{1}{x})^2$

8) $n(x) = \frac{3}{4}\sin(5x + 1)$

III) Les types d'équations différentielles étudiées cette année :

1) Equations différentielles linéaires homogènes du premier ordre à coefficients constants :

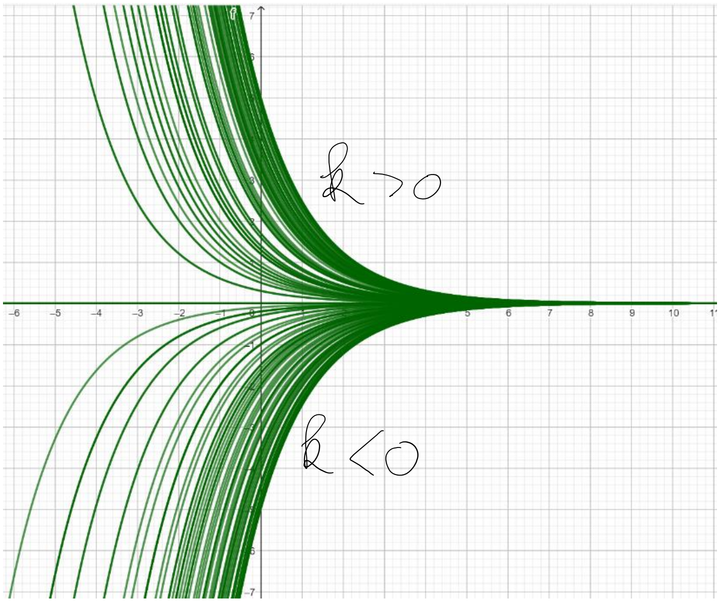
$$y' = ay \text{ (avec } a \neq 0) \quad \text{Cette équation sera notée } (E_0)$$

Prop : Les solutions de l'équation (E_0) sur $\mathbb{R}$ sont les fonctions f_k définies sur $\mathbb{R}$ par :
$f_k(x) = ke^{ax}$, où $k \in \mathbb{R}$

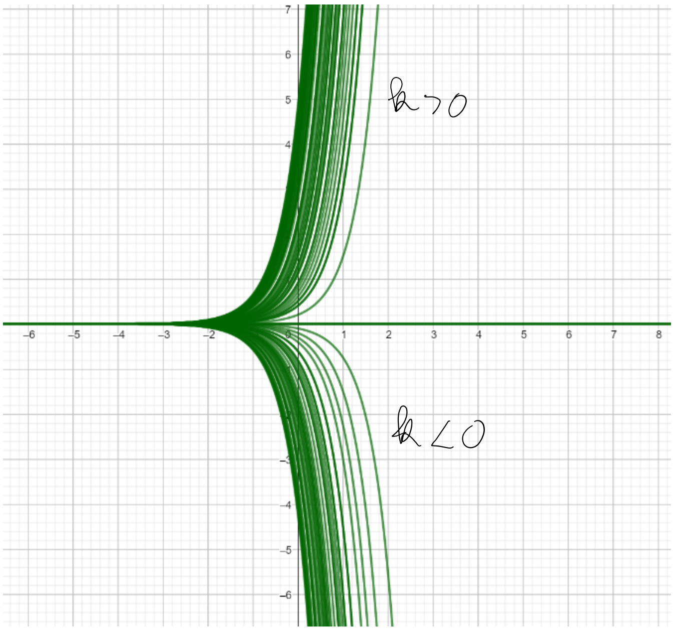
Démonstration :

Allure des courbes des fonctions f solutions : (avec $f(x) = ke^{ax}$)

Si a > 0 :



- Si a < 0 :



Exemples :

1) Déterminer toutes les solutions de l'équation (E) : y' = 5y

2) Déterminer la solution f de l'équation (E) : 4y' – 2y = 0 telle que f(0) = -1 :

2) Equations différentielles linéaires à coefficients constants du premier ordre avec second membre :

a) Equations du type y' = ay + b, où b $\in \mathbb{R}$ et a $\neq$ 0 :

Prop : Les solutions d'une telle équation sont les fonctions du type $x \mapsto Ce^{ax} - \frac{b}{a}$ où $C \in \mathbb{R}$

Démonstration :

Exemple :

Déterminer toutes les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation (E) : $3y' + 5y = -2$

b) Equations (E) du type $y' = ay + f$, où f est une fonction

Méthode :

- Une solution particulière g de l'équation (E) sera soit donnée, soit déterminée de manière guidée au début de l'exercice
- Si h est une autre solution de (E), alors $h - g$ est solution de l'équation (E_0) : $y' = ay$
- Alors $h(x) - g(x) = Ce^{ax}$, avec $C \in \mathbb{R}$
- D'où l'expression de toutes les solutions de (E) : $Ce^{ax} + g(x)$

En effet :

Exemple :

On considère l'équation (E) : $y' - y = e^x$

1) Montrer que la fonction f définie par $f(x) = xe^x$ est une solution particulière de (E)
2) Déterminer la solution g de (E) telle que : $g(0) = 1$