

Spé Maths Terminale (M Mangeard)	<u>Corrigé du devoir de</u> <u>mathématiques :</u> <i>Géométrie dans l'espace (2)</i>	Fait le jeudi 6 janvier 2022
--	---	---------------------------------

Exercice 1 :

On considère l'ensemble (E) des points M(x ; y ; z) de l'espace tels que :

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y + 2z - 4 = 0$$

Déterminer les éléments caractéristiques de l'ensemble (E) en justifiant.

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 4y + 2z - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{x^2 - 6x + 9}_{(x-3)^2} + \underbrace{y^2 + 4y + 4}_{(y+2)^2} + \underbrace{z^2 + 2z + 1}_{(z+1)^2} - 9 - 4 - 1 - 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 - 18 = 0$$

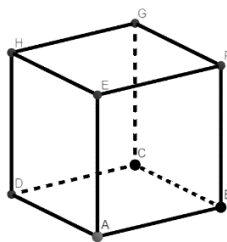
$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 18$$

$$\Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+2)^2 + (z+1)^2 = 18$$

L'ensemble (E) est donc la sphère de centre $\Omega(3; -2; -1)$
et de rayon $\sqrt{18} = 3\sqrt{2}$

Exercice 2 :

Dans le cube ABCDEFGH ci-dessous, on se place dans le repère (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$)



Le point K est le centre du carré DCGH et le point L est défini par : $\overrightarrow{BL} = 4\overrightarrow{BC}$

Déterminer les coordonnées des points K et L dans le repère (A ; $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$)

$$\overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DK} \text{ (relation de Chasles)}$$

$$= \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DH}, \text{ or, } \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{AE}$$

$$\text{D'où : } \overrightarrow{AK} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$$

Donc : K a pour coordonnées $(\frac{1}{2}; 1; \frac{1}{2})$

On sait que: $\vec{BL} = 4\vec{BC}$

$$\Rightarrow \vec{BA} + \vec{AL} = 4\vec{BA} + 4\vec{AC} \text{ (relation de Chasles)}$$

$$\Rightarrow \vec{AL} = -3\vec{AB} + 4\vec{AC} = -3\vec{AB} + 4(\vec{AB} + \vec{BC}) \text{ (rel de Chasles)}$$

$$\Rightarrow \vec{AL} = -3\vec{AB} + 4\vec{AB} + 4\vec{AD} \text{ (car } \vec{BC} = \vec{AD})$$

$$\Rightarrow \vec{AL} = \vec{AB} + 4\vec{AD}$$

Donc: L a pour coordonnées (1 ; 4 ; 0)

Exercice 3 :

Soient les quatre points suivants dans un repère orthonormé de l'espace :

A(-1 ; 2 ; 3), B(4 ; 1 ; 5), C(2 ; -1 ; 3) et D(1 ; 1 ; -2)

1) Montrer que les points A, B et C définissent un plan de l'espace

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}, \text{ d'où } \vec{AB} \begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \text{ et } \vec{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Comme $z_{\vec{AC}} = 0$ et $z_{\vec{AB}} = 2 \neq 0$, il n'existe pas de réel k tel que: $\vec{AC} = k\vec{AB}$

Donc: $\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ non-colinéaires

C'est-à-dire: A, B et C non alignés

Ces 3 points définissent donc un plan de l'espace

2) Montrer que le vecteur $\vec{n}$ de coordonnées $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

$\vec{AB}$ et $\vec{AC}$ sont deux vecteurs directeurs du plan (ABC)

$$\vec{n} \cdot \vec{AB} = 1 \times 5 + 1 \times (-1) + (-2) \times 2$$

$$= 5 - 1 - 4 = 0, \text{ d'où } \vec{n} \perp \vec{AB}$$

$$\vec{n} \cdot \vec{AC} = 1 \times 3 + 1 \times (-3) + (-2) \times 0$$

$$= 3 - 3 = 0, \text{ d'où } \vec{n} \perp \vec{AC}$$

$\vec{n}$ est orthogonal
à deux vecteurs
directeurs
du plan (ABC)

Donc: $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

3) En déduire une équation cartésienne du plan (ABC)

D'après 2), on sait que $\vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal au plan (ABC)

Soit $M(x; y; z) \in (ABC)$:

$\vec{AM} \begin{pmatrix} x+1 \\ y-2 \\ z-3 \end{pmatrix}$ est orthogonal à $\vec{n}$

$$\Rightarrow \vec{AM} \cdot \vec{n} = 0$$

$$\Rightarrow 1 \times (x+1) + 1 \times (y-2) - 2 \times (z-3) = 0$$

$$\Rightarrow x + y - 2z + 1 - 2 + 6 = 0$$

$$\Rightarrow \underline{x + y - 2z + 5 = 0} \text{ est une équation cartésienne du plan (ABC)}$$

4) On admet que $H\left(-\frac{5}{6}; -\frac{5}{6}; \frac{5}{3}\right)$ est le projeté orthogonal du point D sur le plan (ABC)

Déterminer une représentation paramétrique de la droite (DH)

Soit $M(x; y; z) \in (DH)$:

$\vec{DM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z+2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de (DH)

Comme (DH) est orthogonal au plan (ABC), $\vec{DM}$ et $\vec{n}$ sont colinéaires.

$$\text{or, } \vec{n} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{D'où: } \vec{DM} = k \vec{n}, k \in \mathbb{R}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x-1 \\ y-1 \\ z+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k \\ k \\ -2k \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = 1 + k \\ y = 1 + k \\ z = -2 - 2k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

c'est une représentation paramétrique de la droite (DH)

5) Sachant que l'aire du triangle (ABC) est $3\sqrt{6} \text{ cm}^2$, calculer en cm^3 , le volume du tétraèdre (ABCD).

$$V(ABCD) = \frac{1}{3} \times \text{Aire (Base)} \times \text{hauteur}$$

$$= \frac{1}{3} \times \text{Aire (ABC)} \times DH$$

$$\text{or, } H \left(-\frac{5}{6} ; -\frac{5}{6} ; \frac{5}{3} \right)$$

$$DH = \sqrt{(x_H - x_D)^2 + (y_H - y_D)^2 + (z_H - z_D)^2}$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{5}{6} - 1\right)^2 + \left(-\frac{5}{6} - 1\right)^2 + \left(\frac{5}{3} + 2\right)^2}$$

$$= \sqrt{\left(-\frac{11}{6}\right)^2 + \left(-\frac{11}{6}\right)^2 + \left(\frac{11}{3}\right)^2}$$

$$= \sqrt{\frac{121}{36} + \frac{121}{36} + \frac{121}{9}}$$

$$= \sqrt{\frac{242}{36} + \frac{484}{36}} = \sqrt{\frac{726}{36}} = \frac{11\sqrt{6}}{6}$$

$$\text{Donc: } \underline{V(ABCD) = \frac{1}{3} \times 3\sqrt{6} \times \frac{11\sqrt{6}}{6} = 11 \text{ cm}^3}$$