Spé Maths Terminale (M Mangeard)	**Corrigé du devoir de mathématiques :** *Loi binomiale*	Fait le jeudi 18 novembre 2021

Exercice 1 :

On considère une variable aléatoire X qui suit une loi binomiale B(34 ;0,64)

1) Donner la formule permettant de calculer P(X = 20)

$P(X=k)=\binom{n}{k}p^k\times(1-p)^{n-k}$

Ici : $\begin{cases} k=20 \\ n=34 \\ p=0,64 \end{cases}$

d'où : $P(X=20)=\binom{34}{20}\times 0,64^{20}\times(1-0,64)^{34-20}$

$=\binom{34}{20}\times 0,64^{20}\times 0,36^{14}$

2) Calculer P(X=20) à la calculatrice et arrondir le résultat à 10^{-4} près

A la calculatrice, on a :

$P(X=20)\simeq 0,1136$

3) Calculer E(X), V(X) et σ(X)

Comme X suit B(34 ; 0,64), alors $E(X)=n\times p$

$=34\times 0,64$

$=21,76$

$V(X)=n\times p\times(1-p)$

$=34\times 0,64\times 0,36$

$=7,8336$

$\sigma(X)=\sqrt{V(X)}$

$=\sqrt{7,8336}$

$\simeq 2,7989$

4) Déterminer **en justifiant** : (les résultats seront arrondis à 10^{-4} près)

a) $P(X \geq 25)$

$P(X\geqslant 25)=1-P(X<25)$

$=1-P(X\leq 24)$

A la calculatrice, on a :

$P(X\geqslant 25)\simeq 0,1640$

b) $P(12 \leq X \leq 30)$

$P(12\leq X\leq 30)=P(X\leq 30)-P(X\leq 12-1)$

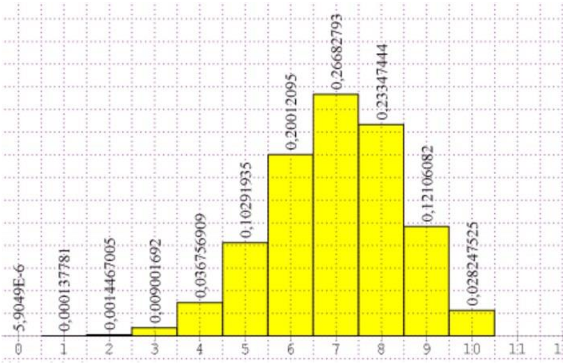
$=P(X\leq 30)-P(X\leq 11)$

A la calculatrice, on a :

$P(12\leq X\leq 30)\simeq 0,9995$

Exercice 2 :

Voici le diagramme en barres associé à la variable aléatoire X qui suit une loi binomiale B(n ; 0,7), n étant un entier naturel :



On sait que E(X) est un entier naturel.

1) Calculer n en justifiant.

Le diagramme est approximativement centré sur E(X). Or, $E(X) \in \mathbb{N}$

D'où, par lecture graphique, $E(X) = 7$

or, $E(X) = n \times p$ (car X suit une loi binomiale)

d'où $7 = n \times 0,7 \iff n = \frac{7}{0,7} = \boxed{10}$

2) Calculer $P(7 \leq X \leq 8)$ en arrondissant le résultat à 10^{-4} près : a) En utilisant uniquement les données du graphique b) En utilisant les paramètres de la loi binomiale et la calculatrice

a) Avec les données de l'énoncé :

$P(7 \leq X \leq 8) = P(X=7) + P(X=8) \simeq 0,2668 + 0,2335$

$= 0,5003$

b) Avec les paramètres et la calculatrice :

$P(7 \leq X \leq 8) = P(X \leq 8) - P(X \leq 7-1)$

$= P(X \leq 8) - P(X \leq 6)$

Avec la calculatrice :

$P(X \leq 8) - P(X \leq 6) \simeq 0,8507 - 0,3504$

$= 0,5003$

Exercice 3 :

On considère une urne contenant dix boules blanches et deux boules noires toutes indiscernables au toucher.

On prélève dix boules successivement avec remise.

On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de boules noires à l'issue des dix prélèvements.

1) Montrer soigneusement que X suit une loi binomiale dont on donnera les paramètres

On répète dix fois, de manière indépendante, la même épreuve de Bernoulli (le fait d'effectuer les tirages avec remise nous assure d'avoir la même épreuve de Bernoulli). Pour chaque épreuve, deux issues → Succès : obtenir une boule noire → Echec : obtenir une boule blanche

On peut donc modéliser cette situation à l'aide d'un schéma de Bernoulli de paramètres $\begin{cases} n = 10 \\ p = \frac{2}{12} = \frac{1}{6} \end{cases}$

Comme X compte le nombre de succès à l'issue des dix tirages,
X suit une loi binomiale de paramètres $\left(10; \frac{1}{6}\right)$

2) Calculer la probabilité qu'il n'y ait que des boules noires

$$P(X=10) = \underbrace{\binom{10}{10}}_{=1} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \times \left(1-\frac{1}{6}\right)^{10-10}$$
$$= \left(\frac{1}{6}\right)^{10} \simeq 1{,}65 \times 10^{-8}$$

3) Calculer la probabilité à 10^{-4} près qu'au moins la moitié des boules tirées soient noires.

$$P(X \geqslant 5) = 1 - P(X<5)$$
$$= 1 - P(X \leq 4)$$

A la calculatrice,

on a : $P(X \geqslant 5) \simeq 0{,}0155$