Spé Maths Terminale (M Mangeard)	**Corrigé du devoir n°1 : Géométrie dans l'espace.** *Vecteurs/Coplanarité/Bases et repères de l'espace/Représentation paramétrique de droites*	Fait le jeudi 07 octobre 2021

Exercice 1 :

Dans un repère de l'espace, on considère les trois points A(2 ;-1 ;4), B(-3 ;1 ;2) et C(5 ;3 ;4)

1) Montrer soigneusement que A, B et C définissent un plan.

On a : $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -3-2 \\ 1+1 \\ 2-4 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} x_C - x_A \\ y_C - y_A \\ z_C - z_A \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 5-2 \\ 3+1 \\ 4-4 \end{pmatrix}$

d'où $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -5 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ d'où $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$

Comme $z_{\overrightarrow{AC}} = 0$ et $z_{\overrightarrow{AB}} = -2 \neq 0$, il n'existe pas de réel $k \neq 0$, tel que :

$z_{\overrightarrow{AB}} = k \times z_{\overrightarrow{AC}}$

c'est-à-dire tel que : $\overrightarrow{AB} = k\overrightarrow{AC}$

Donc : $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ ne sont pas colinéaires

Par conséquent : A, B, C définissent un plan

2) Soit le point E(-5 ;0 ;8) dans le même repère. On note (d) la droite qui passe par E et de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix} -18 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix}$

a) Montrer que le point E $\notin$(ABC)

Soit $\overrightarrow{AE}\begin{pmatrix} -5-2 \\ 0+1 \\ 8-4 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$

Supposons qu'il existe $k_1 \in \mathbb{R}$ et $k_2 \in \mathbb{R}$, avec : $\overrightarrow{AE} = k_1\overrightarrow{AB} + k_2\overrightarrow{AC}$

c'est-à-dire : $\begin{pmatrix} -7 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5k_1 + 3k_2 \\ 2k_1 + 4k_2 \\ -2k_1 \end{pmatrix}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} -5k_1 + 3k_2 = -7 \\ 2k_1 + 4k_2 = 1 \\ -2k_1 = 4 \end{cases}$ $\Leftrightarrow \begin{cases} -5\times(-2) + 3\times\frac{5}{4} = 10 + \frac{15}{4} = \frac{55}{4} \neq -7 \\ 4k_2 = 1 - 2\times(-2) = 1+4 = 5 \Leftrightarrow k_2 = \frac{5}{4} \\ k_1 = -2 \end{cases}$

D'où : il n'existe pas de réels k_1 et k_2 tels que $\overrightarrow{AE} = k_1\overrightarrow{AB} + k_2\overrightarrow{AC}$

Les vecteurs $\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}$ ne sont pas coplanaires

Autrement dit : $E \notin (ABC)$

d) Montrer que (d) et (ABC) sont parallèles

$\vec{u}\begin{pmatrix}-18\\2\\-6\end{pmatrix}$ $\quad \vec{AB}\begin{pmatrix}-5\\2\\-2\end{pmatrix}$ $\quad \vec{AC}\begin{pmatrix}3\\4\\0\end{pmatrix}$

On suppose qu'il existe deux réels k_1 et k_2 tels que : $\vec{u} = k_1\vec{AB} + k_2\vec{AC}$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix}-18\\2\\-6\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-5k_1+3k_2\\2k_1+4k_2\\-2k_1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}-5k_1+3k_2=-18\\2k_1+4k_2=2\\-2k_1=-6\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-5\times 3 \quad +3\times(-1) = -15-3=-18\\4k_2 = 2-2\times 3 = -4 \Leftrightarrow k_2=-1\\k_1 = 3\end{cases}$$

D'où : $\vec{u} = 3\vec{AB} - \vec{AC}$

$\vec{u}, \vec{AB}, \vec{AC}$ sont coplanaires

Autrement dit : $(d) // (ABC)$

Exercice 2 :

Soient les points F(-2 ;-3 ;1) et G(1 ;1 ;7)

1) Déterminer une représentation paramétrique de la droite (FG)

Soit $M(x;y;z) \in (FG)$:

$\vec{FM}\begin{pmatrix}x+2\\y+3\\z-1\end{pmatrix}$ $\quad \vec{FG}\begin{pmatrix}3\\4\\6\end{pmatrix}$

$\vec{FM}$ et $\vec{FG}$ sont colinéaires :

$$\vec{FM} = t\vec{FG},\ t \in \mathbb{R}$$

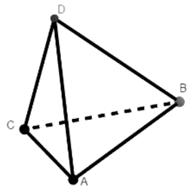
$$\Leftrightarrow \begin{cases}x+2 = 3t\\y+3 = 4t\\z-1 = 6t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x = -2+3t\\y=-3+4t\\z = 1+6t\end{cases},\ t\in\mathbb{R}$$

2) Le point H(-5 ;-7 ;-5) est-il situé sur la droite (FG) ? Justifier.

$$\left.\begin{array}{l}-2+3t = -5 \Leftrightarrow 3t = -5+2=-3\\ \Leftrightarrow t = -1\\ y = -3+4\times(-1) = -3-4 = -7 = y_H\\ \text{et } z = 1+6\times(-1) = -5 = z_H\end{array}\right\} \text{donc : } H \in (FG)$$

Exercice 3 :



ABCD est un tétraèdre

On se place dans le repère (A ;$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$)

On définit les points E par : $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{DC}$ et F avec : $\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD}$

1) Déterminer les coordonnées des points E et F dans le repère (A;$\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AD}$) en justifiant.

$\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{DC} = 2\overrightarrow{DA} + 2\overrightarrow{AC}$ (rel de Chasles)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{AD}$, d'où E a pour coordonnées $(0;2;-2)$

$\overrightarrow{BF} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BD} \Leftrightarrow \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AF} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AD})$ (rel de Chasles)

$\Leftrightarrow \overrightarrow{AF} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

$\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

Donc : F a pour coordonnées $\left(\frac{1}{3}; 0; \frac{2}{3}\right)$

2) La droite (Δ) passe par le point A et admet pour vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-6\\8\end{pmatrix}$

Montrer que (Δ) // (EF)

$\overrightarrow{EF}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-2\\\frac{2}{3}+\frac{6}{3}\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-2\\\frac{8}{3}\end{pmatrix}$

or, $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\-6\\8\end{pmatrix}$ vecteur directeur de (Δ)

d'où $\frac{1}{3}\vec{u}\begin{pmatrix}\frac{1}{3}\\-2\\\frac{8}{3}\end{pmatrix}$, donc $\frac{1}{3}\vec{u} = \overrightarrow{EF}$

Les vecteurs sont colinéaires, d'où $(\Delta) // (EF)$