Spé Maths Terminale	**Corrigé du devoir de mathématiques :** *Fonction ln*	Fait le 10/03/2022

EXERCICE N° 1 (8 pts et 15 min)

1) a) Simplifier au maximum les expressions suivantes :

$$A = \ln\left(\sqrt{e^7}\right) + \frac{\ln(e^9)}{\ln(e^2)} \text{ et } B = \frac{e^{\ln 2+\ln 3}}{e^{\ln 3-\ln 4}}$$

On a : $\ln(\sqrt{e^7}) = \frac{1}{2}\ln(e^7)$ (car $\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\ln(a)$, pour $a>0$)

$= \frac{1}{2}\times 7\times \ln(e)$ (car $\ln(a^n) = n\ln(a)$, pour tout $a>0$ et $n\in\mathbb{N}$)

$= \frac{7}{2}\times 1$ (car $\ln(e) = 1$)

$= \frac{7}{2}$

d'où : $A = \frac{7}{2} + \frac{9\cancel{\ln(e)}}{2\cancel{\ln(e)}}$ (car $\ln(a^n) = n\ln(a)$, pour tout $a>0$ et $n\in\mathbb{N}$)

$= \frac{7}{2}+\frac{9}{2} = \frac{16}{2} = 8$

$B = \frac{e^{\ln 2}\times e^{\ln 3}}{e^{\ln 3}\times e^{-\ln(4)}}$ (car $e^{a+b} = e^a\times e^b$)

$= \frac{2\times 3}{\frac{e^{\ln 3}}{e^{\ln 4}}}$ (car $e^{-x} = \frac{1}{e^x}$)

$= \frac{2\times 3}{\frac{3}{4}} = \frac{2\times\cancel{3}}{\cancel{3}}\times 4 = 8$

b) Que peut-on en déduire pour A et B

On a : $A = B = 8$

2) Déterminer les entiers naturels n tels que : $\left(\frac{2}{3}\right)^n < 10^{-4}$

$\left(\frac{2}{3}\right)^n > 0$, d'où $\ln\left(\frac{2}{3}\right)^n < \ln 10^{-4}$ (car ln est une fonction strictement croissante)

$\iff n\ln\left(\frac{2}{3}\right) < -4\ln(10)$ (car $\ln(a^n) = n\ln(a)$ pour tout $a>0$ et $n\in\mathbb{Z}$)

$\iff n > \underbrace{\frac{-4\ln(10)}{\ln\left(\frac{2}{3}\right)}}_{\simeq 22,7}$ car $\ln\left(\frac{2}{3}\right) < 0$.

Donc : $S = [23;+\infty[\, \cap\, \mathbb{N}$

3) Résoudre les équations suivantes après avoir indiqué les domaines d'existence :

a) $2\ln x = \ln(x + 4) + \ln(2x)$

$2\ln(x)$ est défini $\iff x>0$

$\ln(x+4)$ est défini $\iff x+4>0 \iff x>-4$

$\ln(2x)$ est défini $\iff 2x>0 \iff x>0$

Domaine de l'équation : $]0;+\infty[$

Pour tout $x\in\,]0;+\infty[$:

$2\ln(x) = \ln(x^2)$

et $\ln(x+4)+\ln(2x) = \ln[(x+4)\times 2x]$

$= \ln(2x^2+8x)$

or, $\ln(a) = \ln(b) \iff a = b$, pour tout $a, b>0$

D'où : $x^2 = 2x^2+8x$

$\iff -x^2-8x = 0$

$\iff x(-x-8) = 0$

$\iff x = 0$ ou $-x-8 = 0$

$\iff x = 0$ ou $x = -8$

or, $0\notin\,]0;+\infty[$ et $-8\notin\,]0;+\infty[$

Donc : $S = \emptyset$

b) $3\,e^{x-1} = 2$

e^{x-1} est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$.
D'où le domaine de l'équation est $\mathbb{R}$.

$e^{x-1} = \frac{2}{3} \iff \ln(e^{x-1}) = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$ (car $a = b \iff \ln(a) = \ln(b)$ pour tout $a, b > 0$)

$\iff x - 1 = \ln\left(\frac{2}{3}\right)$ (car $\ln(e^x) = x$, pour tout $x \in \mathbb{R}$)

$\iff x = 1 + \ln\left(\frac{2}{3}\right)$

Donc : $S = \left\{1 + \ln\left(\frac{2}{3}\right)\right\}$

4) Etudier le signe sur]0 ; + ∞ [de la fonction f(x) = ln(x)(2lnx – 1)

$\ln(x) \geq 0 \iff x \geq 1$

$2\ln(x) - 1 \geq 0$
$\iff \ln(x) \geq \frac{1}{2}$
$\iff x \geq \sqrt{e}$ (car $a \geq b \iff e^a \geq e^b$, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$)

x	0		1		$\sqrt{e}$		$+\infty$
Signe de $\ln(x)$		$-$	0	$+$		$+$	
Signe de $2\ln(x)-1$		$-$		$-$	0	$+$	
Signe de $f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$f(x) \geq 0 \iff x \in]0;1] \cup [\sqrt{e}; +\infty[$
$f(x) < 0 \iff x \in]1; \sqrt{e}[$

EXERCICE N° 2 (12 pts et 30 min)

Soit $f(x) = x + 4 - 4\ln(x) - \frac{3}{x}$. On note ($C_f$) sa courbe représentative dans un repère du plan.

1) Calculer $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$.

$\lim\limits_{x \to +\infty} (x+4) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{3}{x} = 0$

Par somme, on a une FI du type "$\infty - \infty$"

$x + 4 - 4\ln(x) - \frac{3}{x} = x\left(1 + \frac{4}{x} - 4\frac{\ln(x)}{x} - \frac{3}{x^2}\right)$

Or, par croissance comparée : $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0 = \lim\limits_{x \to +\infty} \frac{4}{x} = \lim\limits_{x \to +\infty} -\frac{3}{x^2}$

D'où : par somme : $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{4}{x} - 4\frac{\ln(x)}{x} - \frac{3}{x^2}\right) = 1$

or, $\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$

Par produit : $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$

2) On admet que f est dérivable sur]0 ;+∞[

a) Montrer que $f'(x) = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2}$

f est dérivable sur]0;+∞[comme somme de fonctions dérivables sur]0;+∞[

On a : $f'(x) = 1 - 4 \times \frac{1}{x} - 3 \times \left(-\frac{1}{x^2}\right)$

$= 1 - \frac{4}{x} + \frac{3}{x^2} = \frac{x^2 - 4x + 3}{x^2}$

b) Dresser le tableau de variations de f sur]0 ;+∞[.

$x^2 > 0$, pour tout $x \in]0;+\infty[$

Signe de $x^2 - 4x + 3$: $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 12 = 4 > 0$: ce trinôme admet donc deux racines réelles distinctes

$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4+2}{2} = 3$ et $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{4-2}{2} = 1$

Le trinôme est du signe de a à l'extérieur de ses racines. Or, $a = 1 > 0$

D'où :

x	0		1		3		$+\infty$
signe de x^2-4x+3		+	0	−	0	+	

Tableau de variations de f sur $]0;+\infty[$

x	0		1		3		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		+	0	−	0	+	
Variations de f		↗	2	↘	$6-4\ln(3)$	↗	$+\infty$

$f(1) = 1+4-4\ln(1)-\frac{3}{1} = 2$

$f(3) = 3+4-4\ln(3)-\frac{3}{3}$
$= 6-4\ln(3)$

3) Montrer qu'il existe un point de C_f en lequel la tangente est parallèle à la droite D d'équation $y = x$ et déterminer l'équation de cette tangente T

D a pour équation $y = x$: son coefficient directeur $= 1$

Soit $f'(a)$: le coeff. directeur de la tangente cherchée, on a $f'(a) = 1$

$\Leftrightarrow \frac{a^2-4a+3}{a^2} = 1$

$\Leftrightarrow a^2-4a+3 = a^2 \Leftrightarrow -4a+3 = 0$

$\Leftrightarrow a = \frac{3}{4}$

On a (T) d'éq. réduite : $y = f'(a)(x-a)+f(a)$

$= 1\times\left(x-\frac{3}{4}\right)+f\left(\frac{3}{4}\right)$

Or, $f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}+4-4\ln\left(\frac{3}{4}\right)-\frac{3}{\frac{3}{4}} = \frac{19}{4}-4\ln\left(\frac{3}{4}\right)-4 = \frac{3}{4}-4\ln\left(\frac{3}{4}\right)$

d'où : $y = x-\cancel{\frac{3}{4}}+\cancel{\frac{3}{4}}-4\ln\left(\frac{3}{4}\right)$

L'éq. réduite de (T) est donc : $y = x-4\ln\left(\frac{3}{4}\right)$

4) f est deux fois dérivable sur]0 ;+∞[.

a) Montrer que : $f''(x) = \frac{4x^2-6x}{x^4}$

D'après 2a), on sait que : $f'(x) = \frac{x^2-4x+3}{x^2}$

f' est dérivable sur $]0;+\infty[$.

On pose : $u(x) = x^2-4x+3$ $v(x) = x^2$

$u'(x) = 2x-4$ $v'(x) = 2x$

Or : $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$

D'où : $f''(x) = \frac{(2x-4)x^2-2x(x^2-4x+3)}{x^4}$

$= \frac{\cancel{2x^3}-4x^2-\cancel{2x^3}+8x^2-6x}{x^4}$

$= \frac{4x^2-6x}{x^4}$

b) Etudier la convexité de f sur]0 ;+∞[

D'après 4a), on a : $f''(x) = \frac{4x^2-6x}{x^4} = \frac{2x(2x-3)}{x^4}$

$2x > 0$, pour tout $x > 0$ et $x^4 > 0$, pour tout $x > 0$

$2x-3 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant \frac{3}{2}$

Signe de $f''(x)$:

x	0		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
signe de $2x$	0	$+$		$+$	
signe de $2x-3$		$-$	0	$+$	
signe de $f''(x)$		$-$	0	$+$	

Donc : f est concave sur $]0;\frac{3}{2}]$ et convexe sur $[\frac{3}{2};+\infty[$

c) En déduite la position relative de C_f et de la tangente T obtenue à la question 3)

Dans la question 3), on a vu que (T) est la tangente à (C_f) en $a=\frac{3}{4}\in]0;\frac{3}{2}]$

or, sur $]0;\frac{3}{2}]$, f est concave

Donc : (C_f) est située en-dessous de ses tangentes

Par conséquent : (C_f) est située en-dessous de (T)

3) Montrer que (C_f) n'admet sur $]0\,;+\infty[$ qu'un seul point d'inflexion dont on donnera les coordonnées.

f'' s'annule et change de signe en $x=\frac{3}{2}$ seulement

(C_f) admet donc un unique point d'inflexion de coordonnées $\left(\frac{3}{2};f\left(\frac{3}{2}\right)\right)$

or, $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}+4-4\ln\left(\frac{3}{2}\right)-\frac{3}{\frac{3}{2}}=\frac{11}{2}-4\ln\left(\frac{3}{2}\right)-2$

$=\frac{7}{2}-4\ln\left(\frac{3}{2}\right)$

Le point d'inflexion a pour coordonnées :

$\left(\frac{3}{2};\frac{7}{2}-4\ln\left(\frac{3}{2}\right)\right)$

QUESTIONS BONUS

4) a) Montrer que f(x) = $\frac{x^2+4x-4x\ln x-3}{x}$.

$f(x)=x+4-4\ln(x)-\frac{3}{x}$

$=\frac{x(x+4-4\ln(x))-3}{x}$

$=\frac{x^2+4x-4x\ln(x)-3}{x}$

b) En déduire $\lim\limits_{x\to0+} f(x)$

$\lim\limits_{x\to0^+} x=0$ et $\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty$: par produit on a une F I du type "$0\times(-\infty)$"

Par croissance comparée : $\lim\limits_{x\to0^+} x\ln(x)=0$

or, $\lim\limits_{x\to0^+} x^2+4x-3=-3$, par somme : $\lim\limits_{x\to0^+} x^2+4x-4x\ln(x)-3=-3$

On a : $\lim\limits_{x\to0^+} x=0^+$

D'où, par quotient : $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ (règle des signes)

5) Montrer que l'équation f(x) = 0 admet exactement une solution sur]0 ;+∞[

- f est définie et continue sur $]0;+\infty[$
- $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=-\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=+\infty$, or, $0\in]-\infty;+\infty[$

D'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution dans $]0;+\infty[$