Spé Maths Terminale (M Mangeard)	**Feuille de permanence n°3 :** *Exercices de synthèse sur les suites*	Octobre 2020

Exercice 1 : (Méthode de Héron) *(Héron d'Alexandrie : Mathématicien et ingénieur grec du 1er siècle après JC)*

On considère la suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{2}{u_n}\right) \\ u_0 = 1 \end{cases}$

1) Tabuler cette suite sur la calculatrice. Conjecturer les variations et la limite éventuelle de cette suite.
2) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\sqrt{2} \leq u_{n+1} \leq u_n$
3) En déduire les variations de (u_n)
4) Montrer que cette suite est convergente.
5) Si on note L sa limite, on admet que L = f(L) , si on pose $f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$

   Calculer L en justifiant.

   De manière générale, si on considère a > 0

   La suite (u_n) définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right) \\ u_0 \in \mathbb{R}^* \end{cases}$
   est convergente et $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n =$……………

   La convergence vers………….. est d'autant plus rapide que u_0 est proche de…………..

   Remarque : c'est cet algorithme qui est utilisé par les calculatrices pour calculer les racines carrées.

Exercice 2 : Approche du nombre d'or

On note Φ, la solution positive de l'équation $x^2 = x + 1$
Ce nombre est appelé **le nombre d'or** . Le moine franciscain Luca Pacioli (1445-1517) lui consacre un traité : ***La divine proportion.***

$\Phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. On considère la fonction f définie sur [0 ;+∞[, par $f(x) = \sqrt{1+x}$
On définit alors la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ u_0 = 1 \end{cases}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

1) Montrer que $f(\Phi) = \Phi$
2) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $1 \leq u_n \leq u_{n+1} \leq \Phi$
3) En déduire la convergence de (u_n)
4) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $0 \leq \sqrt{1+\Phi} - \sqrt{1+u_n} \leq \frac{\phi - u_n}{\phi^2}$
5) Montrer ensuite que : $0 \leq \Phi - u_{n+1} \leq \frac{\phi - u_n}{\phi^2}$

6) En déduire enfin que : $0 \leq \Phi - u_n \leq \frac{\phi - u_0}{\phi^{2n}}$

7) En déduire : $\lim_{n \to +\infty} u_n$

Exercice 3 :

On définit la suite (u_n) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par :

$$u_n = \sum_{k=n}^{2n} \frac{1}{k} = \frac{1}{n} + \frac{1}{n+1} + \cdots + \frac{1}{2n}$$

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_{n+1} - u_n = \frac{-3n-2}{n(2n+2)(2n+1)}$
2) En déduire les variations de la suite (u_n)
3) Montrer alors qu'elle est convergente.

Exercice 4 : Sommes télescopiques

Soit la suite (un) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, par $u_n = \frac{1}{n(n+1)}$

1) Montrer que $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$
2) On pose $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)}$

   Calculer $\lim_{n \to +\infty} S_n$