Spé Maths Terminale	Corrigé des exercices (Transition Spé Première / Spé Terminale)	Lundi 07 septembre 2020

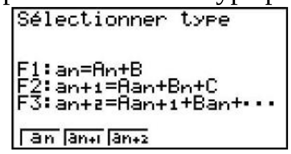
Exercice 1 :

On définit la suite (u_n) par : $\begin{cases} u_{n+1} = \frac{1}{8}u_n + \frac{1}{2} \\ u_0 = 3 \end{cases}$ **pour tout n$\epsilon\mathbb{N}$**

1) *En utilisant la calculatrice (mode RECUR), calculer les cinq premiers termes de la suite (u_n)*

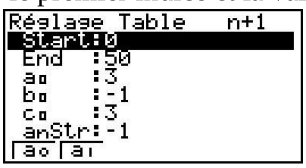
Rappels :

Il faut se placer en mode RECUR, puis sélectionner type par F3

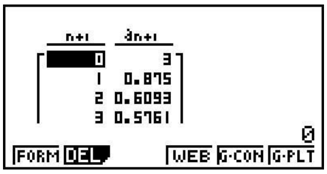


Choisir F2 : suite définie par récurrence.
On tape la formule de définition de la suite :

On tape F5 (SET) pour déterminer le premier indice et la valeur de u_0



On tape deux fois sur EXE et on obtient le tableau de valeurs :



On obtient pour les cinq premiers termes :
$u_0 = 3$, $u_1 = \frac{7}{8} = 0{,}875$, $u_2 = \frac{39}{64} = 0{,}6093$, $u_3 = \frac{295}{512} = 0{,}5761$ et $u_4 = \frac{2343}{4096} = 0{,}572$

2) *Conjecturer les variations de (u_n)*

Il semble que la suite (u_n) soit décroissante

3) *Montrer que cette suite n'est ni arithmétique, ni géométrique*

$u_1 - u_0 = \frac{7}{8} - 3 = \frac{7}{8} - \frac{24}{8} = -\frac{17}{8}$ et $u_2 - u_1 = \frac{39}{64} - \frac{7}{8} = \frac{39}{64} - \frac{56}{64} = -\frac{17}{64}$

D'où : $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$, donc **(u_n) n'est pas arithmétique**.

$\frac{u_1}{u_0} = \frac{\frac{7}{8}}{3} = \frac{7}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{24} \approx 0{,}292$ et $\frac{u_2}{u_1} = \frac{39}{64} \times \frac{8}{7} = \frac{39}{8\times 7} = \frac{39}{56} \approx 0{,}696$

D'où : $\frac{u_1}{u_0} \neq \frac{u_2}{u_1}$, **donc la suite (u_n) n'est pas géométrique**.

4) On pose $v_n = u_n - \frac{4}{7}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

   a) *Montrer que (v_n) est géométrique. On donnera son premier terme et sa raison.*

$v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{4}{7}$

$= \frac{1}{8} u_n + \frac{1}{2} - \frac{4}{7}$

$= \frac{1}{8} u_n + \frac{7}{14} - \frac{8}{14}$

$= \frac{1}{8} u_n - \frac{1}{14} = \frac{1}{8} (v_n + \frac{4}{7}) - \frac{1}{14}$

$= \frac{1}{8} v_n + \frac{1}{14} - \frac{1}{14} = \frac{1}{8} v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Donc : (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{8}$ et de premier terme : $v_0 = u_0 - \frac{4}{7} = 3 - \frac{4}{7} = \frac{17}{7}$

   b) *Exprimer v_n en fonction de n*

Comme (v_n) est géométrique, $v_n = v_0 \times q^n$

$$\boxed{\text{Donc } v_n = \frac{17}{7} \times \left(\frac{1}{8}\right)^n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$$

   c) *En déduire u_n en fonction de n*

Comme $u_n = v_n + \frac{4}{7}$, alors :

$$\boxed{u_n = \frac{17}{7} \times \left(\frac{1}{8}\right)^n + \frac{4}{7}, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N}}$$

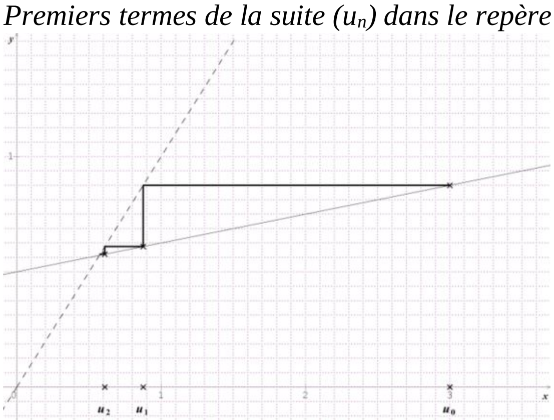
   d) *Etudier les variations de (u_n)*

$u_{n+1} - u_n = \frac{17}{7} \times \left(\frac{1}{8}\right)^{n+1} \cancel{+ \frac{4}{7}} - \frac{17}{7} \times \left(\frac{1}{8}\right)^n \cancel{- \frac{4}{7}} = \frac{17}{7} \times \left(\frac{1}{8}\right)^n (\frac{1}{8} - 1)$

$= \frac{17}{7} \times \left(\frac{1}{8}\right)^n (- \frac{7}{8}) < 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Donc : (u_n) est une suite décroissante.

   e) *Premiers termes de la suite (u_n) dans le repère ci-dessous :*



Quelle semble être la limite de (u_n) quand n tend vers +∞ ?

Il semble que plus n augmente, plus u_n se rapproche de l'abscisse du point d'intersection des deux droites, à savoir $\frac{4}{7}$

Exercice 2 :

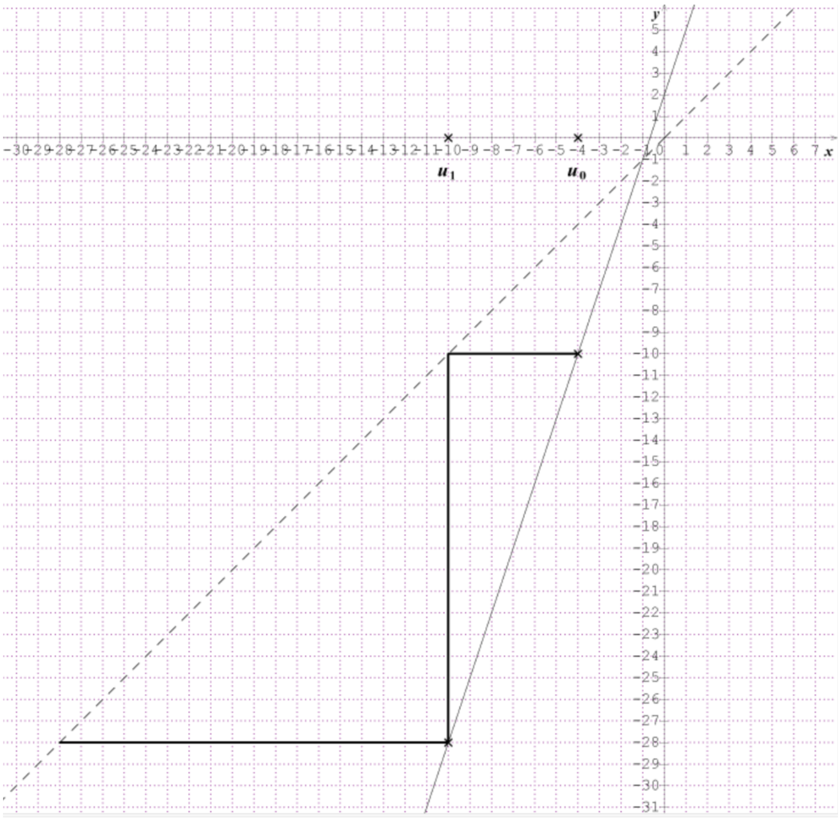
On définit la suite (u_n) par : $\begin{cases} \mathbf{u_{n+1} = 3u_n + 2} \\ \mathbf{u_0 = -4} \end{cases}$, pour tout n$\in\mathbb{N}$

1) Calculer les cinq premiers termes

u_0 = <u>- 4</u> , $u_1 = 3u_0 + 2 = 3\times(-4) + 2 = -12 + 2 =$ <u>- 10</u>, $u_2 = 3\times(-10) + 2 =$ <u>-28</u>

$u_3 = 3\times(-28) + 2 =$ <u>-82</u> et $u_4 = 3\times(-82) + 2 = -246 + 2 =$ <u>- 244</u>

2) Compléter la représentation des premiers termes de la suite :



Conjecturer les variations et l'éventuelle limite quand n tend vers +∞

Il semblerait que la suite (u_n) soit décroissante et que plus n augmente, plus u_n devient petit (sans valeur « d'arrêt »)

3) *Montrer que (u_n) n'est ni arithmétique, ni géométrique.*

$u_1 - u_0 = -10 + 4 = -6$ et $u_2 - u_1 = -28 + 10 = -18$
Comme $u_1 - u_0 \neq u_2 - u_1$, alors la suite (u_n) n'est pas arithmétique

$$\frac{u_1}{u_0} = \frac{-10}{-4} = \frac{5}{2} \quad \text{et} \quad \frac{u_2}{u_1} = \frac{-28}{-10} = \frac{14}{5} = 2{,}8$$

Donc : La suite (u_n) n'est pas géométrique.

4) a) $v_{n+1} = u_{n+1} +1$

$= 3u_n + 2 +1 = 3(u_n + 1) = 3v_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Donc : (v_n) est une suite géométrique de raison 3 et de premier terme $v_0 = u_0 + 1 = -3$

b) Comme (v_n) est géométrique, $v_n = v_0 \times q^n$

D'où : $v_n = -3\times 3^n = -3^{n+1}$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

c) $u_n = v_n - 1 = -3^{n+1} - 1$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

5) Déterminer précisément les variations de (u_n)

$u_{n+1} - u_n = -3^{n+2} - \cancel{1} + 3^{n+1} + \cancel{1}$

$= 3^{n+1} (1 - 3)$

$= 3^{n+1} \times (-2) < 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Donc : (u_n) est une suite décroissante.