Spé Maths Terminale (M Mangeard)	**Corrigé du DM 1 (Problème 133 page 38)**	Rendu le vendredi 06/11/2020

Partie A :

1) u_0 = nbre de singes en milliers en 2020

$= 1$

u_1 = nbre de singes en milliers en 2021

$= 1{,}04 \times 1 = 1{,}04$

2) On a : $u_{n+1} = 1{,}04 \times u_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

donc (u_n) est une suite géométrique de raison 1,04 et de premier terme $u_0 = 1$

Comme (u_n) est géométrique, $u_n = u_0 \times q^n$

$= 1 \times 1{,}04^n = 1{,}04^n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

3) $\lim\limits_{n \to +\infty} 1{,}04^n = +\infty$, car $1{,}04 > 1$

D'où : $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = +\infty$

4) Ce modèle va « s'écarter » de la réalité au bout de quelques années.
Il va falloir en utiliser un autre.

Partie B :

$$\begin{cases} v_{n+1} = -\frac{1}{40} v_n^2 + 1{,}1 v_n \\ v_0 = 1 \end{cases}$$

1) $f(x) = -\frac{1}{40} x^2 + 1{,}1x$

Sur $[0 ; 10]$: f est dérivable et $f'(x) = -\frac{1}{40} \times 2x + 1{,}1$

$= -\frac{1}{20} x + 1{,}1$

Pour : $0 \leq x \leq 10$, $-\frac{1}{2} \leq -\frac{1}{20} x \leq 0$

d'où : $0 < 0{,}6 \leq \underbrace{-\frac{1}{20} x + 1{,}1}_{f'(x)} \leq 1{,}1$

Donc : f est strictement croissante sur $[0;10]$

2) a) Par récurrence :

* Initialisation : $v_0 = 1$
  et $0 \leq 1 \leq 4$, d'où la proposition est initialisée

* Hérédité : On suppose la propriété vraie pour un certain rang $k \in \mathbb{N}$
  (c'est-à-dire : $0 \leq v_k \leq 4$)

or, d'après 1), f est strictement croissante sur $[0;10]$, d'où en particulier sur $[0;4]$

Alors : $\underbrace{f(0)}_{\substack{\parallel \\ 0}} \leq \underbrace{f(v_k)}_{=v_{k+1}} \leq f(4)$

$$0 \leq v_{k+1} \leq \underbrace{-\frac{1}{40} \times 4^2 + 1{,}1 \times 4}$$

$$= -\frac{2}{5} + \frac{22}{5}$$

$$= \frac{20}{5} = 4$$

D'où : $0 \leq v_{k+1} \leq 4$, la propriété est donc héréditaire

* Conclusion : La propriété est initialisée et héréditaire. Elle est donc vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Donc : $0 \leq v_n \leq 4$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

b) $v_{n+1} - v_n = -\frac{1}{40} v_n^2 + 1{,}1 v_n - v_n$

$$= -\frac{1}{40} v_n^2 + 0{,}1 v_n$$

$$= -\frac{1}{40} v_n^2 + \frac{1}{10} v_n$$

$$= v_n \left(-\frac{1}{40} v_n + \frac{1}{10}\right)$$

Comme : $0 \leq v_n \leq 4$, $-\frac{1}{10} \leq -\frac{1}{40} v_n \leq 0$

$$0 \leq -\frac{1}{40} v_n + \frac{1}{10} \leq \frac{1}{10}$$

De plus : $v_n \geq 0$, d'où : $\underbrace{v_n \left(-\frac{1}{40} v_n + \frac{1}{10}\right)}_{v_{n+1} - v_n} \geq 0$, pour tout $n \in \mathbb{N}$

Donc : (v_n) est une suite croissante

c) (v_n) est croissante et majorée par 4
D'après le théorème de convergence monotone,
(v_n) est une suite convergente

d) Comme (v_n) est une suite convergente, on peut noter ℓ sa limite.

$$\ell = f(\ell) \iff \ell = -\frac{1}{40}\ell^2 + 1{,}1\,\ell$$
$$\iff -\frac{1}{40}\ell^2 + 0{,}1\,\ell = 0$$
$$\iff \ell\left(-\frac{1}{40}\ell + 0{,}1\right) = 0$$
$$\iff \ell = 0 \text{ ou } -\frac{1}{40}\ell + 0{,}1 = 0$$
$$\iff \ell = 0 \text{ ou } \cancel{-}\frac{1}{40}\ell = \cancel{-}\frac{1}{10}$$
$$\iff \ell = 0 \text{ ou } \ell = 4$$

Or, (v_n) est croissante : elle est donc minorée par son 1er terme

Ici : $v_0 = 1 > 0$

Donc : $\ell = 4$

3) En Python :

```
n = 0
v = 1
while v <= 3 :
    v = (-1/40)*v**2 + 1,1*v
    n = n+1
print(n)
```

On trouve 22.

Au bout de 22 ans, la population de singes dépassera les 3 000 individus.