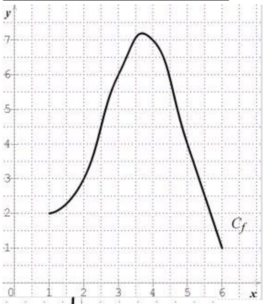
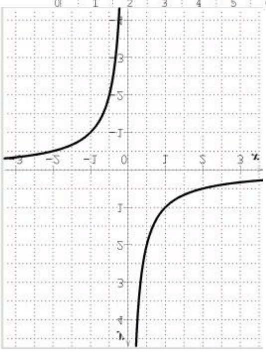
Spé Maths Terminale (M Mangeard)	**Chapitre V : Continuité / Théorème des valeurs intermédiaires et compléments de dérivation**	2020/2021

I) Continuité :

1) Idée de continuité :



Pour tracer la courbe de f sur [1 ;6], on ne « lève pas le stylo »



Pour tracer la courbe de la fonction inverse sur [-3 ;3]\{0} , on doit « lever le crayon »

Dans une première approche, on dira que f est une fonction continue sur [1 ;6] et que la fonction inverse n'est pas continue sur [-3 ;3]

Par contre, on pourra dire que la fonction inverse est continue sur [-3 ;0[et elle l'est également sur]0 ;3]

2) Définition de la continuité d'une fonction en un point :

Soit f une fonction et a $\in D_f$.

Si $\lim_{x\to a} f(x)$ = ……… , alors on dit que ………………………………

Remarque : Définie ainsi la continuité est une notion locale

3) Continuité sur un intervalle :

Si f est une fonction continue **pour tout a ∈ I**, on dira alors que **……………………**

Exemples :

Cas particulier des fonctions affines par morceaux :

Application : Etudier la continuité de la fonction f définie par :

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 1\ , pour\ x\ \leq\ -2 \\ 2x - 1, pour\ x\ \in] - 2\ ; 2] \\ x + 4, pour\ x > 2 \end{cases}$$

Sur chaque intervalle sur lequel f est définie, elle est continue puisque c'est une fonction affine.

Deux cas vont être à étudier à part : au voisinage de -2 et de 2 (c'est en effet en ces valeurs de x que f change d'expression)

- En -2 :

- En 2 :

4) Lien dérivabilité/continuité :

Propriété :

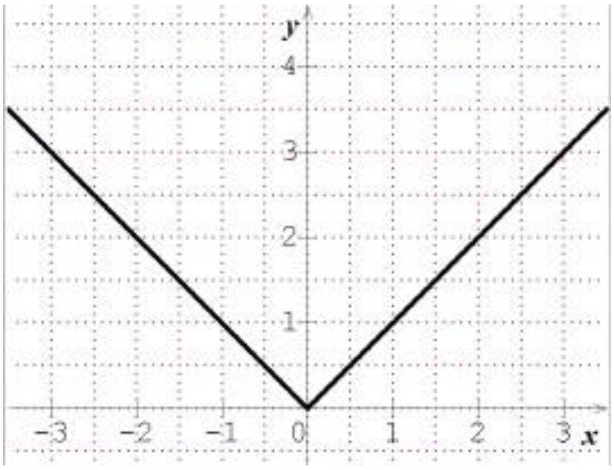
Soit f une fonction dérivable sur un intervalle $I \subset D_f$, alors **……………………..**

***Remarque :*ATTENTION**

La réciproque est ………….. !!

Contre-exemple :

La fonction valeur absolue est …………………………………………………………..

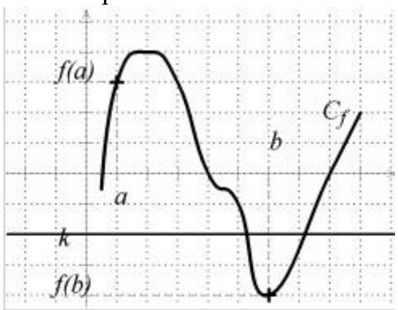


Démonstration :

II) Théorème des valeurs intermédiaires et application :

1) Théorème :

Soient a et b , deux nombres réels tels que a < b



Soit f, une fonction …………………………………… sur [a ;b] *Pour tout réel k entre f(a) et f(b), il existe au moins un réel c compris entre a et b tel que* ………………………….

Autrement dit : L'équation f(x) = k ………………………………………………

2) Corollaire :

Soients a et b , deux nombres réels tels que a < b

Soit f une fonction définie, ……………………………………………………………. *Pour tout k entre f(a) et f(b), l'équation f(x) = k admet ……………………………* ………………………………………………………………………………

Remarques :

- ATTENTION : dans le cas où f est décroissante, k∈[f(b) ;f(a)] (= il faut penser à l'ordre des bornes)
- Ce corollaire s'applique aussi aux intervalles du type [a ;b[,]a ;b],]a ;b[avec a pouvant être -∞ ou b +∞

3) Application à la résolution approchée d'équation :

Méthode :

- On utilise le corollaire pour démontrer qu'une équation admet une unique solution sur un intervalle donné

- Ensuite, on donne une valeur approchée ou un encadrement de cette solution à une précision donnée soit par une méthode algorithmique, soit en utilisant un tableau de valeurs de la calculatrice.

Exemple d'application :

Montrer que l'équation $x^3 - 4x + 1 = 0$ admet une unique solution dans l'intervalle [1,5 ;2].
Donner ensuite un encadrement de cette solution à 10^{-2} près

On pose $f(x) = x^3 - 4x + 1$

III) Rappels de Spé Première sur la dérivation : (Revoir le cours)

1) ***Définition de fonction dérivable en un point***
2) ***Equation réduite de la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a***
3) ***Dérivabilité sur un intervalle + revoir les différentes formules vues en Première***
4) ***Lien dérivation/variations***
5) ***Extremum local***

IV) Compléments à la dérivation :

1) Dérivée de $\sqrt{u}$:

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle $I \subset D_u$ telle que ……….. , pour tout x $\in I$ Alors, $\sqrt{u}$ est dérivable sur I et $(\sqrt{u})'$ = …………..

Exemple :

Soit f(x) = $\sqrt{5x+3}$

2) Dérivée de u^n, avec $n \in \mathbb{Z}^*$

a) Cas où $n \in \mathbb{N}^*$:

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle $I \subset D_u$ et n, un entier naturel non-nul. Alors u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = n \times u' \times u^{n-1}$

b) Cas où $n \in \mathbb{Z}^*$:

Soit u une fonction dérivable sur un intervalle $I \subset D_u$ et n, un entier relatif non-nul avec $u(x) \neq 0$, pour tout x $\in I$ Alors u^n est dérivable sur I et $(u^n)' = n \times u' \times u^{n-1}$

Rappel : Si $x \neq 0$, $n \in \mathbb{N}$, alors : $\frac{1}{x^n} = x^{-n}$

Exemple :

Soit g(x) = $\frac{1}{(3x+2)^4}$

3) Dérivée de la composée de deux fonctions :

Soient u ,une fonction dérivable sur un intervalle $I \subset D_u$ et v, une fonction dérivable pour tout u(x) avec $x \in I$,
Alors vou est dérivable sur I et :

$$\boxed{\text{Pour tout } x \in I,\ (v \circ u)'(x) = v'[u(x)] \times u'(x)}$$

Cas particulier à connaître : Si u(x) = ax + b , avec a et b, deux réels
(vou)(x) = v(u(x)) = v(ax + b) (avec $ax + b \in D_v$)
Alors, vou est dérivable sur $D_{v'}$ et **(v(ax + b))' = a × v' (ax + b)**

Exemple :

$f(x) = (2x + 5)^3$

Remarque : On aurait pu utiliser la formule vue en 2) avec $n \in \mathbb{N}^*$

On aurait pu approcher cette solution par une méthode algorithmique.

Voici un script PYTHON qui permet de répondre à la question :

```
from math import*
def f(x):
    return x**3-4*x+1
def dichoto(f,a,b,eps):
    while b-a >eps:
        c=(a+b)/2
        if f(a)*f(c)<=0:
            a,b=a,c
        else:
            a,b=c,b
    return print((a+b)/2)
a=float(input(("a=")))
b=float(input(("b=")))
eps=float(input(("eps=")))
dichoto(f,a,b,eps)
```

On a créé deux fonctions : une pour la fonction f et une qui permet d’appliquer l’algorithme de dichotomie