Spé Maths Terminale (M Mangeard)	**Chapitre 3 : Limites de fonctions** *Cours à trous*	Année scolaire 2020/2021

Chapitre 3 : Limites de fonctions

Cours à trous

I) Limites en l'infini :

1) Limite infinie :

Définition 1 :

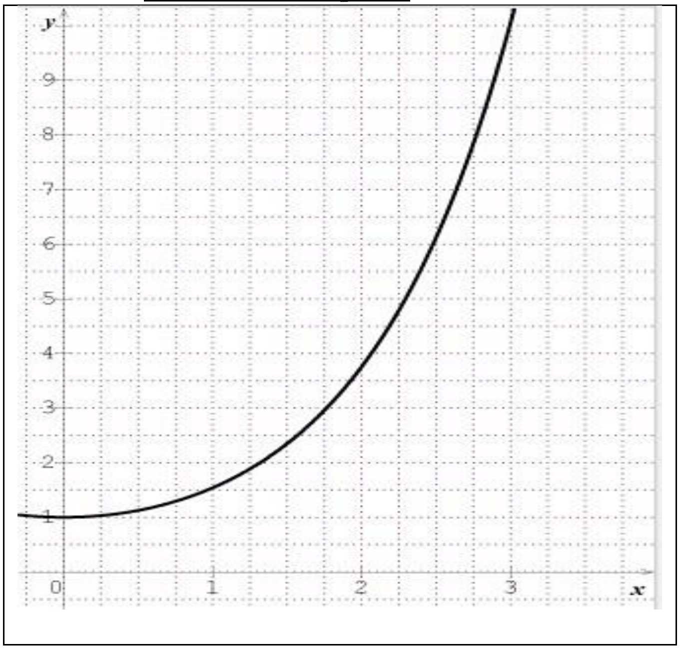
Une fonction f admet pour limite $+\infty$ en $+\infty$ signifie que……………………………………..........

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………………

Schéma : A compléter



Notation :………………………….

Exemples :

Définition 2 :

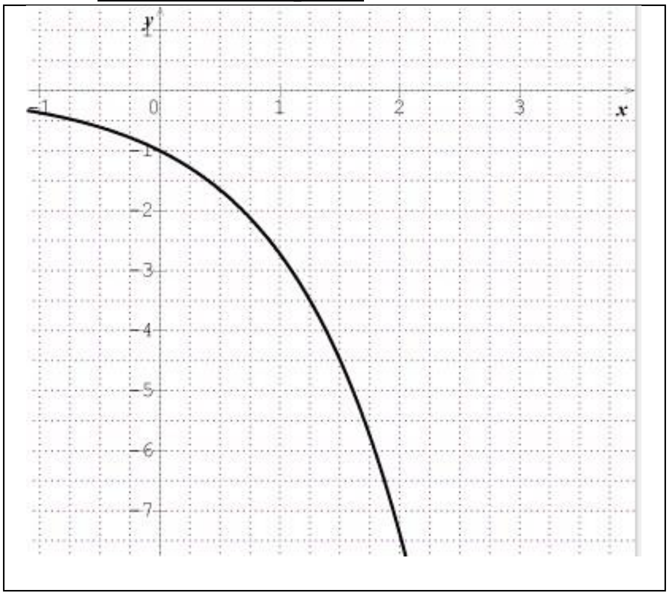
Une fonction f admet pour limite $-\infty$ en $+\infty$ signifie que……………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

……………………………………………………………………………………………

<u>Schéma : A compléter</u>



<u>Notation :</u>…………………………..

<u>Exemples :</u>

2) <u>Limite finie :</u>
   a) <u>Définition :</u>

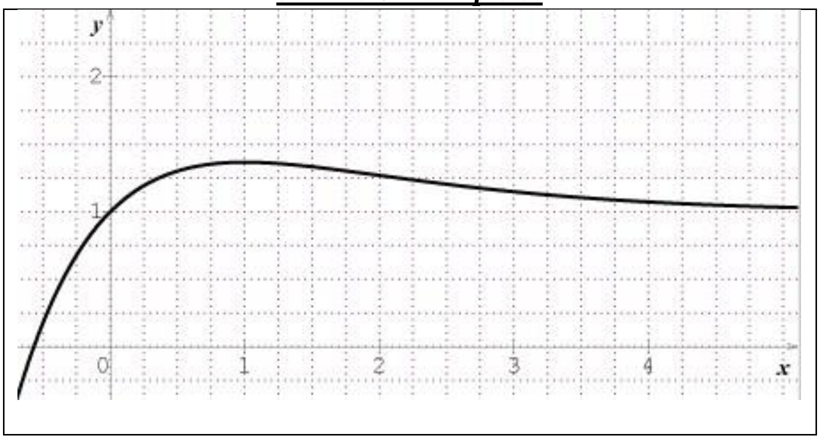
Soit L∈ℝ. Dire que <u>f admet pour limite L en +∞</u> signifie que…………………………………

……………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………….

……………………………………………………………………………………………….

<u>Schéma : A compléter</u>



<u>Notation :</u>…………………………..

<u>Exemples :</u>

b) <u>Interprétation graphique (Asymptote horizontale)</u>

<u>Définition :</u>

Si $\lim_{x \to +\infty} f(x) = L$ alors la droite d'équation………………… est <u>asymptote horizontale à la courbe de f en + ∞</u> (Même chose en -∞ si $\lim_{x \to -\infty} f(x) = L$)

<u>Exemple :</u> Montrer que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe représentative de la fonction inverse en + et - ∞

II) <u>Limites en un point :</u>

1) <u>Limite infinie :</u>

a) <u>Définition :</u>

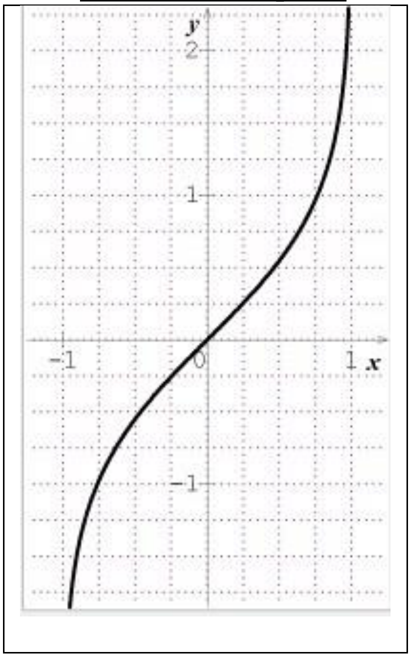
Soit a ∈ℝ. Dire que la fonction f admet pour <u>limite +∞ en a</u> signifie que………………………………………………………………………………………………..

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

<u>Schéma : A compléter</u>



<u>Notation :</u>………………………….

Exemples :

b) Interprétation graphique (Asymptote verticale)

Si $\lim_{x \to L} f(x) = +\infty$ alors la droite d'équation…………………. est asymptote verticale à la courbe de f en L (Même chose en si $\lim_{x \to L} f(x) = -\infty$)

Exemple : Montrer que l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe représentative de la fonction inverse en 0

Remarque : Limite à gauche et limite à droite :

2) Limites finies :

Soit a et L $\in \mathbb{R}$. Dire que la fonction f admet pour limite L en a signifie que…………………………………………………………………………………………………..

……………………………………………………………………………………………………

……………………………..

……………………………………………………………………………………………………

Notation :

Exemples :

III) Limites et opérations :

1) Tableau de synthèse :

On considère deux fonctions f et g. On va étudier tous les cas possibles des éventuelles limites de la somme, du produit et du quotient de ces deux fonctions.

On considère L et L', deux nombres réels

a est un réel ou alors + ou - ∞

a) Somme :

$\lim\limits_{x\to a} f$	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
$\lim\limits_{x\to a} g$	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$\lim\limits_{x\to a}(f+g)$	L + L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	Forme indéterminée

b) Produit :

$\lim\limits_{x\to a} f$	L	L>0	L<0	L>0	L<0	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim\limits_{x\to a} g$	L'	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	+ ou - ∞
$\lim\limits_{x\to a}(f\times g)$	L×L'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée

c) Quotient :

$\lim\limits_{x\to a} f$	L	L	L > 0	L > 0	L < 0	L < 0	+ ou - ∞	0
$\lim\limits_{x\to a} g$	L'$\neq$ 0	+ ou - ∞	0^+	0^-	0^+	0^-	+ ou - ∞	0
$\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f}{g}$	$\dfrac{L}{L'}$	0	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	Forme indéterminée	Forme indéterminée

Remarques :

- Il y a quatre formes indéterminées notées souvent par abus de langage : « $\infty-\infty$ », « $0\times\infty$ », « $\frac{\infty}{\infty}$ » et « $\frac{0}{0}$ »
- Pour lever les éventuelles indéterminations, on transformera l'écriture de l'expression de la fonction dont on veut connaître la limite pour se ramener aux autres cas des tableaux précédents.

2) Composée de deux fonctions :

Propriété :

Soient a,b et c, des nombres réels ou $+\infty$ ou $-\infty$.

Si f et g sont des fonctions telles que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ = b et $\lim\limits_{X\to b} g(X)$ = c, alors :

$$\lim_{x\to a} g(f(x)) = c$$

Schéma :

Exemple :

IV) Théorèmes de comparaison :

1) Théorème 1 :

Si f et g sont deux fonctions qui vérifient les deux propriétés suivantes :

1) *Pour x suffisamment grand, f(x) ≥ g(x)*
2) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$

Alors :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ldots\ldots\ldots$$

Démonstration :

Exemple :

2) Théorème 2 :

Si f et g sont deux fonctions qui vérifient les deux propriétés suivantes :

1) *Pour x suffisamment grand, f(x) ≤ g(x)*
2) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = -\infty$

Alors :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$$

Démonstration :

Exemple :

3) Théorème d'encadrement (théorème des gendarmes) :

Soient f, g et h, trois fonctions, et L, un nombre réel qui vérifient les deux conditions suivantes :

a) *Pour x assez grand, g(x) ≤ f(x) ≤ h(x)*
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = L$

Alors :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..$$

Exemple :

Remarque :

Ce théorème est encore valable pour des limites en $-\infty$ et en une valeur finie (Enoncé à adapter)